

Wirtschaftsmathematik

Inhalt

1. Reelle Funktionen
2. Folgen, Reihen, Grenzwerte
3. Finanzmathematik
4. Integrale.

1. Reelle Funktionen

1.0 Normale Funktionen

Eine Funktion sieht typischerweise so aus:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Damit ist eine Abbildungsvorschrift gemeint, welche eindeutig die Wertemenge mit der Ergebnismenge verbindet. Allen Elementen aus der Wertemenge wird genau ein Element aus der Ergebnismenge (Abbildungsmenge) zugeordnet. Dabei können mehrere Elemente aus der Wertemenge den gleichen Partner aus der Ergebnismenge haben, nicht jedoch umgekehrt.

Zahlensysteme:

natürliche Zahlen	<	ganze Zahlen	<	rationale Zahlen	<	reelle Zahlen
N		Z		Q		R
{1,2,3}		{-1,0,1}		{m/k; m,k∈Z, k≠0}		{√2, π}

Beispiel: $f(x)=x^2$ $x \rightarrow x^2 ; x \in \mathbb{R}$

Dies ist eine Zuordnungsvorschrift, welche eindeutig ist. Aus der Wertemenge wird eine genaue Zuordnung zur Bildmenge vorgenommen.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$g(x) = -\sqrt{x} \quad g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

Alle Maschinenzahlen sind rational, da der Rechner die reellen (bzw. irrationalen) Zahlen nicht genau darstellen kann.

1.1 Polynome; ganze rationale Funktionen

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
mit der Bauart

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad ; a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

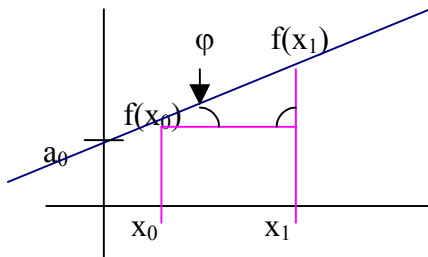
Horner Schema:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= ((\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_2)x + a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

Verwendung findet das Horner-Schema bei den Informatikern zur Darstellung von Zahlensystemen. In der Programmierung ist das Horner-Schema einfach zur Berechnung von Zahlenbasen zu verwenden, wogegen die Exponentendarstellung einen wesentlich komplizierteren Algorithmus voraussetzen würde.

Polynome sind stetige Funktionen, deren Grad durch das n bestimmt wird.

$n=0$: $f(x) = a_0$
 $n=1$: $f(x) = a_1 x + a_0$ (Geradengleichung, $a_1 =$ Steigung
 $a_0 =$ Ordinatenabschnitt)



$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \tan \varphi$$

Nullstellen bei $f(x) = 0 \Rightarrow a_1 x + a_0 = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{a_0}{a_1} \quad ; \text{für } a_1 \neq 0$$

$n=2$: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (Parabel; Normalparabel für $a_2=1, a_1=a_0=0$)
 $a_2 > 0$ oben offen
 $a_2 < 0$ unten offen

Nullstellen werden durch die pq-Formel ermittelt:

$$x \text{ mit } a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit } p = \frac{a_1}{a_2} \quad ; \quad q = \frac{a_0}{a_2}$$

Quadratische Ergänzung ergibt:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Rightarrow x \frac{1}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

n=3 : $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Funktionen 3. Grades haben mindestens eine Nullstelle, da sie immer aus negativ unendlich kommen und zu positiv unendlich gehen, bzw. umgekehrt. Dabei wird dann die Abszisse stets mindestens einmal geschnitten. Ansonsten sind Analytische Bemühungen bei Funktionen dritten Grades nahe an der Sinnlosigkeit. Das Berechnen der Nullstellen erweist sich durch die notwendige Polynomdivision als schwieriges unterfangen, so daß man meistens Näherungslösungen verwendet.

Polynome mit noch höheren Graden berechnet man dann nur noch mit Näherungsverfahren.

1.2 gebrochen Rationale Funktionen

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \text{ mit } g(x) \neq 0 \quad ; f, g \text{ sind Polynome}$$

Beispiel :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für alle } x \neq 0 \\ 4711 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dies ist durchaus eine Funktion mit

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Die Polynomdivision

$$\begin{array}{r} (x^2 + x - 2) : (x - 2) = x + 3 + \frac{4}{x - 2} \\ \underline{-(x^2 - 2x)} \\ 3x - 2 \\ \underline{-(3x - 6)} \\ 4 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x + 3 + \frac{4}{x - 2} = x + 3, \text{ da } x - 2 \text{ im Nenner so groß wird, daß der gesamte Bruch vernachlässigbar wird. (Ergebnis siehe auch Kopie!)}$$

1.3 Exponentialfunktionen

$$f(x)=a^x \quad ; a>0; x \in \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Beispiel einer „berühmten“ Exponentialfunktion :

$$f(x)=e^x; e \approx 2,7182818$$

Potenzregeln :

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a} \text{ für } x \in \mathbb{N} \text{ (wobei das ganze auch für andere } x \text{ funktioniert, dann}$$

schreibt man aber keine Wurzel mehr!)

1.4 Die Logarithmusfunktion

$$a^x=b \quad ; a>1 \quad ; b>0 \quad \quad a \text{ ist die Basis}$$

Man sagt : „x ist logarithmus von b zur Basis a“

Schreibweise : $x = \log_a b$

Wichtige Basen:

a=10	; lg	(dekadischer Logarithmus)
a=e	; ln	(natürlicher Logarithmus; logarithmus naturalis)
a=2	; ld	(dualer Logarithmus; logarithmus dualis)

allgemein kann man aber den Logarithmus folgendermaßen zu jeder Basis ausrechnen:

Umrechnungsregel:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a}$$

Regeln: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

$$\log_a a = 1 \quad ; \text{ da } a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \quad ; \text{ da } a^0 = 1$$

$$\log_a \left(\frac{1}{y} \right) = \log_a 1 - \log_a y = -\log_a y$$

1.5 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind immer vom Typ:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad ; n \in \mathbb{N}$$

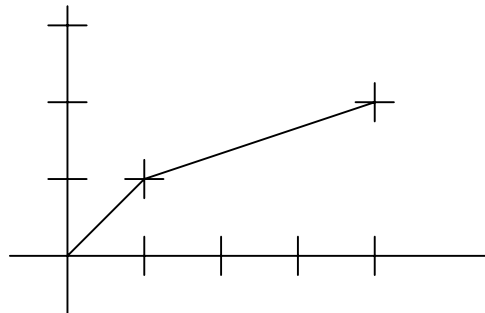
z.B. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Dabei kann die Wurzel auch negative Zahlen verarbeiten :

$$f(x) = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Wurzelfunktion ist auf die Einschränkung im negativen Bereich angewiesen, da es sonst eine Relation wäre. Leider ist die Zeichnung nicht sehr glücklich, aber verdeutlicht die Tatsache.



Da Wurzelfunktionen auch durch Potenzen darstellbar sind, nun ein paar Worte zu den Potenzfunktionen :

1.6 Potenzfunktionen

$$f(x) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^k = x^{\frac{k}{n}} \quad ; n, k \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = x^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{k}{n}}}$$

oder allgemein: $f(x) = x^a \quad ; a \in \mathbb{R}, x > 0$

1.7 Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktion beruht auf der Tatsache, daß man x und y vertauscht, die Achsen graphisch spiegelt oder aber mathematisch an die Sache herangeht.

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow f(x) & \text{ist eine normale Abbildung} \\ f^{-1}(f(x)) \rightarrow x & \text{ist die Umkehrabbildung} \end{array}$$

Bei der Geradengleichung läßt sich dieser Umstand am besten Zeigen:

$$\begin{aligned} \text{Z.B.} \quad & f(x) = 3x - 6 = y \\ & \Leftrightarrow 3x = y + 6 \\ & \Leftrightarrow x = \frac{y}{3} + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Umkehrfunktion:} \quad \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 2 = f^{-1}(x)$$

Beispiel für $x=2$:

$$x = 2 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 2$$

Wenn man nun die Umkehrfunktion auf die Ursprungsfunktion anwendet, müßte x übrigbleiben:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 6) = \frac{3x - 6}{3} + 2 = \frac{3(x - 2)}{3} + 2 = x - 2 + 2 = x$$

Da bei Geradengleichungen das Finden der Umkehrfunktion eigentlich keine Probleme darstellt, hier ein paar Beispiele, wo das nicht so ist.

Beispiel 2:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & ; f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dieser Punkt ist sehr wichtig, da} \\ \text{sonst die Umkehrfunktion eine} \\ \text{Relation wäre!} \end{array}$$

Weiter Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f^{-1} &= \ln x \\ f^{-1}(f(x)) &= \ln e^x = x \cdot \ln e = x \\ f(f^{-1}(x)) &= e^{\ln x} = x \end{aligned}$$

2.0 Folgen, Reihen, Grenzwerte

2.1 Folgen

Def.: Eine unendliche Folge reeller Zahlen besteht aus den Werten einer Funktion

$$f : N \rightarrow R,$$

die die natürlichen Zahlen auf die reellen Zahlen abbildet.

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots$$

$$\text{kürzer: } a_1, a_2, a_3, a_4, \dots = \langle a_n \rangle$$

$$\text{z.B. } 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n \quad \text{steigend}$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n \quad \text{steigend}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n} \quad \text{fallend}$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1} \quad \text{nicht monoton}$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots \quad \text{steigend}$$

Def.: Eine Folge heißt monoton steigend (fallend) genau dann, wenn $a_k \leq a_{k+1}$ (bzw. $a_k \geq a_{k+1}$) für alle $k \in N$

Def.: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt nach unten (oben) beschränkt, genau dann, wenn eine Schranke $S \in R$ existiert, mit $S \leq a_n$ ($S \geq a_n$) für alle $n \in N$

2.2.1 Arithmetische Folge

$\langle a_n \rangle$ ist eine arithmetische Folge genau dann, wenn

$$a_{n+1} - a_n = d \quad ; \text{ für alle } n \in N$$

$$\text{z.B. } 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \quad d=2$$

$$1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -1\frac{1}{2}, \dots \quad d = -\frac{1}{2}$$

Bildungsgesetz: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Beispiel: 10.000, 9.500, 9.000, ..., 500, 0 $d=-500$ endliche Folge

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow R$$

2.2.2 Geometrische Folge

Beispiel einer Geometrischen Folge :

$$1, q, q^2, q^3, q^4, \dots$$

Oder allgemein :

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^n, \dots \quad ; \text{ wobei } q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{hier : } q = \frac{aq^3}{aq^2}$$

z.B. $10000, 10000 \cdot 1.03, 1000 \cdot 1.03^2, 1000 \cdot 1.03^3, \dots, 1000 \cdot 1.03^n, \dots$ wobei $q = 1.03$
oder „Der Pfennig zu Christi Geburt“ :

$$0.01, 0.01 \cdot 1.03, 0.01 \cdot 1.03^2, \dots, 0.01 \cdot 1.03^{1998} = 4,454253815 \cdot 10^{23}$$

Frage: „Wann verdoppelt sich ein Betrag bei 7% Zinsen?“

$$k, k \cdot 1.07, k \cdot 1.07^2, \dots, k \cdot 1.07^n$$

$k \cdot 1.07^n = 2k$ ist gesucht. Man erkennt jetzt schon, daß das k nicht von Bedeutung ist

$$\Rightarrow 1.07^n = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln 1.07^n = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n \ln 1.07 = \ln 2$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1.07} \approx 10.244 \text{ Jahre}$$

Umgekehrte Fragestellung :

„Wieviel Geld muß ich anlegen, damit in 10 Jahren bei 5% Zinsen 10.000,-- DM vorhanden sind“

$$k \cdot 1.05^{10} = 10.000$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{10.000}{1.05^{10}} \approx 6139.13$$

Grenzwerte:

z.B. : *) = $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ „läuft“ gegen 0, fällt monoton, liegt in den Schranken: $1 \geq *) > 0$

Def.: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}; \varepsilon > 0$; dann heißt ein Intervall $U(\varepsilon, a)$ um einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ eine ε -Umgebung von a genau dann, wenn :

$$U(\varepsilon; a) =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$$

$$= \{x \in \mathbb{R}; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

$$\Leftrightarrow |a - x| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$$

[$a - x = -(x - a)$ durch Betrag daher gleich]

z.B. $U(1.3;7) =]5.7;8.3[= \{x \in \mathbb{R}; 5.7 < x < 8.3\} = \varepsilon$ -Umgebung
 $U(0.1,-3) =]-3.1;-2.9[= \{x \in \mathbb{R}; -3.1 < x < -2.9\}$

Beispiel:

$$\left\langle 3 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Welche Folgenglieder liegen in $U(0.05;3)$

$$a_1 = 2; a_2 = 3.5; a_3 = 2.6\bar{6}; \dots; a_{20} = 3.05; a_{21} = 2.95$$

Ab $n > 20$ liegen die Folgenmitglieder endlich in dem Intervall von ε da:

$$\begin{aligned} |a_n - a| < \varepsilon &\Rightarrow \left| 3 + \frac{(-1)^n}{n} - 3 \right| < 0.05 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < 0.05 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0.05 \quad | \cdot n \div 0.05(!) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{0.05} = 20 \end{aligned}$$

Das funktioniert aber nicht mehr mit $U(0.05;3.1)$:

$$U(0.05;3.1) = \left| 3 + \frac{(-1)^n}{n} - 3.1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| -0.1 + \frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon$$

z.B. $\varepsilon = 0.01$: $\left| 0.1 + \frac{(-1)^n}{n} \right| < 0.01$

für große n geht $\left| 0.1 + \frac{(-1)^n}{n} \right|$ gegen 0.1

Def.: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ hat einen Grenzwert, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ (ε kann beliebig klein werden) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n > n_0$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon \Leftrightarrow]g - \varepsilon; g + \varepsilon[= g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

Beispiel:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \quad g = 0 \quad ; \quad n > 0$$

gesucht n : $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ für $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow n_0 = 100$

für $\varepsilon = 0.002 \Rightarrow n_0 = 500$

Def.: Eine Folge, die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**
 Eine Folge, die keinen Grenzwert hat, heißt **divergent**

Schreibweise für g ist Grenzwert von $\langle a_n \rangle \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

z.B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

zu zeigen:

$$\left\langle \frac{n+1}{2n-1} \right\rangle ; n \in \mathbb{N} \Rightarrow g = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{für hinreichend große } n (n > n_0)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2n+2-2n+1}{4n-2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3}{4n-2} \right| < \varepsilon$$

$$\text{da } n > 0: \frac{3}{4n-2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < 4n-2 \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} + 2 < 4n \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{\varepsilon} + 2}{4} < n$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4\varepsilon} + \frac{2}{4} < n \Rightarrow n > \frac{1}{2} + \frac{3}{4\varepsilon}$$

$$\text{für z.B. } \varepsilon = 0.01 \Rightarrow n > \frac{1}{2} + \frac{3}{0.04} = 75.5 \Rightarrow n_0 = 75$$

$$\varepsilon = 0.01 \Rightarrow n > \frac{1}{2} + \frac{3}{0.00004} = 75000.5 \Rightarrow n_0 = 75000$$

Ein Beispiel:

zeigen Sie, daß $\langle q^n \rangle$ für $|q| < 1$ den Grenzwert 0 hat.

$$|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon \quad \text{für } n > n_0 ; q \neq 0 \text{ (wäre sonst witzlos)}$$

$$\Leftrightarrow |q|^n < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n \ln|q| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} \quad \text{da } 0 \leq q \leq 1 \text{ ist } \ln|q| < 0$$

$$\text{für kleine } \varepsilon \text{ ist } \ln \varepsilon \text{ auch negativ} \Rightarrow \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} > 0$$

$$\frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} = n_0 \Rightarrow n > n_0, \text{ was auch gezeigt werden sollte.}$$

Und noch eines:

$$a_n = \frac{4n+6}{n} ; \text{ Vermutung: } g = 4$$

zu zeigen nun:

$$\begin{aligned} & |a_n - 4| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{4n+6}{n} - 4 \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{4n+6-4n}{n} \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{6}{n} \right| < \varepsilon \quad n > 0 \\ \Rightarrow & n > \frac{6}{\varepsilon} \quad \frac{6}{\varepsilon} = n_0 \Rightarrow n > n_0, \text{ was auch zu zeigen war!} \end{aligned}$$

z.B. $\varepsilon = 0,01 \Rightarrow n_0 = 600$ alle a_n für $n > 600$ liegen in der Grenze

Weiteres Beispiel:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 - \frac{3}{4n} ; g = 2 \\ \text{z.Z. } & \left| 2 - \frac{3}{4n} - 2 \right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{4n} < \varepsilon \quad \text{da } n > 0 \\ \Leftrightarrow & n > \frac{3}{4\varepsilon} \end{aligned}$$

Also passt der geratene Grenzwert, da sich alle $n > \frac{3}{4\varepsilon}$ für ein beliebiges ε um genau diesen Grenzwert tummeln und kein Wert für ein a_n mit $n > n_0$ wieder dort ausbricht. Alle Werte bleiben in dem Bereich $]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$ gefangen.

Ein letztes Beispiel:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{10-n}{n} ; g = -1 \\ \left| \frac{10-n}{n} + 1 \right| < \varepsilon & \Leftrightarrow \left| \frac{10-n+n}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{10}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{10}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Erklärungen s.o.

Def.: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n \rangle = 0$ heißt Nullfolge. Hat eine Folge $\langle a_n \rangle$ den Grenzwert g , so ist $\langle a_n - g \rangle$ eine Nullfolge.

Grenzwertsätze für Folgen:

$\langle a_n \rangle$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\langle b_n \rangle$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

1. $\langle a_n \pm b_n \rangle$ hat den Grenzwert $a \pm b$
2. $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ hat den Grenzwert $a \cdot b$
3. $\langle \frac{a_n}{b_n} \rangle$ hat den Grenzwert $\frac{a}{b}$ mit $b \neq 0, b_n \neq 0$

Beispiele:

$$a_n = 7 - \frac{2}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 7 \quad b_n = \frac{4n+6}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

$$a_n - b_n = 7 - \frac{2}{n} - \frac{4n+6}{n} = 7 - \frac{4n-6-2}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = 7 - 4 = 3$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{7 - \frac{2}{n}}{\frac{4n+6}{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{4n-9}{2n} + \frac{n}{n^2} \right) = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$$

$$\text{NR: } \frac{4n-9}{2n} = \frac{4 - \frac{9}{n}}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{9}{n}}{2} = \frac{4-0}{2} = 2$$

Def.: Jede monotone und beschränkte Folge hat einen Grenzwert.

2.2 Reihen:Endliche Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Unendliche Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$$

Endliche arithmetische Reihe:

$$\sum_{i=1}^n a_i \quad ; \quad a_{i+1} - a_i = d \quad \forall i$$

z.B. :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\text{oder die } n\text{-te Partialsumme: } \sum_{i=1}^n (a + (i-1)d) = \frac{n}{2}(2a + nd) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Merke: $\sum_{i=1}^n a = n \cdot a$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Bei } \sum_{i=1}^{100} i : \\ \left. \begin{array}{l} 1 + 100 = 101 \\ 2 + 99 = 101 \\ 3 + 98 = 101 \dots \end{array} \right\} = n + 1 \text{ davon } 50 = \frac{n}{2} \text{ Stück} \Rightarrow \frac{n}{2}(n+1) \end{array} \right)$$

Beispiele für Reihen:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^n 2i = \frac{n}{2}(2n + 2) = n(n+1) = n^2 + n$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \sum_{i=1}^n 2i - 1 = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k a_{ij} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1k} + a_{21} + \dots + a_{2k} + a_{31} + \dots + a_{nk} \right)$$

Die unendliche arithmetische Reihe

Def.: Eine unendliche Reihe ist **konvergent** (**divergent**), wenn die Folge ihrer Partialsummen s_n konvergent (divergent) sind.

Beispiel:

$$1. \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Partialsummen:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = \langle s_n \rangle$$

$$2. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Partialsummen:

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 1,5 \quad s_3 = 1,75 \quad s_4 = 1,875$$

Beispiel der Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2+n} = 1$$

Partialsommen:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \\ s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

$$NR: \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (\text{Partialbruchzerlegung})$$

Def.: Wenn eine Reihe konvergent ist, so ist die Folge der Summanden eine Nullfolge!

Die geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n aq^i &= a \sum_{i=0}^n q^i = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = a \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \quad ; q \neq 1 \\ &= a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n q^i &= (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \cdot \left(\frac{q-1}{q-1} \right) \\ &= \left(\frac{q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} - 1 - q - q^2 - q^3 - \dots - q^n}{q-1} \right) = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} \end{aligned}$$

Die unendliche geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = a \cdot \frac{-1}{q - 1} = a \cdot \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1$$

Die unendliche geometrische Reihe ist **nur für** $|q| < 1$ **konvergent**. Ansonsten divergiert die Reihe.

Beispiele:

$$1) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$2) \quad 100 + 10 + 1 + 0,1 + \dots + 100 \cdot \frac{1}{10^n} = 100 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{\frac{9}{10}} = \frac{1000}{9}$$

$$3) \quad 0,9 + 0,99 + 0,999 + \dots + \text{ausch!} \quad q > 1(!)$$

$$4) \quad 0,\bar{9} = 0,9 + 0,09 + \dots + 0,9 \cdot \frac{1}{10^n} = 0,9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 0,9 \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 0,9 \cdot \frac{10}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

$$5) \quad 0,\overline{37} = 0,37 + 0,0037 + \dots + 0,37 \cdot \frac{1}{100^n} = 0,37 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{0,37}{\frac{99}{100}} = \frac{37}{99}$$

$$6) \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-0,6)^i = 1 - 0,6 + 0,6^2 + 0,6^3 - \dots = \frac{1}{1 - (-0,6)} = \frac{1}{1,6} = 0,625$$

3.0 Finanzmathematik

3.1 Einfache Verzinsung

$$z = k_0 \cdot i \cdot x$$

k_0 = Anfangskapital

i = Zinssatz in Prozent, z.B. 5% = $\frac{5}{100}$

p = Zinssatz mit $i = \frac{p}{100}$

x = Anteil an der Zinsperiode

z.B. $k_0 = 10.000$ $i = 0,05 [p = 5]$ $x = \frac{1}{2}$

$$z = 10.000 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{2} = 250$$

Das Endkapital k_e berechnet sich wie folgt:

$$k_e = k_0 + z = k_0 \cdot (1 + i \cdot x)$$

ist $x = 1$ (also die gesamte Zinsperiode), dann wird auch $(1 + i) = q$ geschrieben

$\Rightarrow k_e = k_0 q$, wenn die gesamte Zinsperiode angesetzt wird.

Deutsche Methode zur Berechnung der Laufzeit:

$$1 \text{ Jahr} = \frac{360}{360}$$

$$1 \text{ Monat} = \frac{30}{360}$$

daraus folgt die Anzahl Tage bis zu einem bestimmten Datum :

$$t = 30 \cdot (M - 1) + T \quad \text{dabei ist } M \text{ der aktuelle Monat, } T \text{ ist der aktuelle Tag.}$$

DOCH: $T \in \{1, \dots, 30\}$, also nie größer, als 30!

Beispiel:

$$21.10.: t = 30 \cdot (10 - 1) + 21 = 30 \cdot 9 + 21 = 270 + 21 = 291$$

$$\Rightarrow x = \frac{291}{360} \approx 0,808 \quad \left[\text{absolut richtig: } \frac{294}{365} = 0,805 \right]$$

z.B. $10.000 \cdot 0,05 \cdot \frac{291}{360} = z \approx 404,17$

3.2 Zinseszins:

Zinsen werden am Ende eines Zinszeitraumes gezahlt und sofort wieder angelegt.

$$\begin{array}{ll} \text{Kapital zu Beginn :} & k_0 \\ \text{Kapital nach 1 Jahr:} & k_1 = k_0 \cdot q \\ \text{Kapital nach 2 Jahren:} & k_2 = k_1 \cdot q = k_0 \cdot q^2 \\ & \vdots \\ \text{Kapital nach n Jahren} & k_n = k_{n-1} \cdot q = k_0 \cdot q^n \end{array}$$

Diese Folge muß nun noch etwas umgeformt werden, wenn man ausnahmsweise mal was anderes ausrechnen will:

Umformungen:

$$k_0 = \frac{k_n}{q^n} \quad (\text{Abzinsen oder Diskontieren})$$

z.B. $k_5 = 10.000$; $q = 1,05$; $k_0 = \frac{10.000}{1,05^5} = 7835,26$

$$n = \frac{\ln \frac{k_n}{k_0}}{\ln q} = \frac{\ln k_n - \ln k_0}{\ln q} \quad \text{mit } q > 1, \text{ da } i > 0$$

$$q = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} \Rightarrow i = q - 1$$

z.B. $n = 12$; $k_n = 10.000$; $k_0 = 5.000 \Rightarrow q = \sqrt[12]{\frac{10.000}{5.000}} = \sqrt[12]{2} \approx 1,05946$
 $\Rightarrow i = 0,05946 \approx 5,95\%$

Die sog. gemischte Verzinsung oder Sparbuchmethode:

Gebrochene Zinsperiode zu Beginn der Laufzeit von t_1 Tagen, dann Verzinsung über n Jahre, dann erneut Verzinsung von t_2 Tagen am Ende der Laufzeit.

$$k_e = k_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t_2}{360}\right)$$

Beispiel:

Start am 17.09.97. Laufzeit bis zum 30.08.2001.

$$\Rightarrow i = 0,05 \quad t_1 = 103 = 360 - (30 \cdot 8 + 17) \quad k_0 = 1.000$$

$$n = 3 \quad t_2 = 240 = 30 \cdot 7 + 30$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_e &= 1.000 \cdot \left(1 + 0,05 \cdot \frac{103}{360}\right) \cdot (1,05)^3 \cdot \left(1 + 0,05 \cdot \frac{240}{360}\right) \\ &= 1.000 \cdot (1,01430) \cdot (1,157625) \cdot (1,03) \\ &= 1,213,32 \text{ DM} = 616,84 \text{ EU} \end{aligned}$$

Unterjährige Verzinsung:

Der effektive Zinssatz P_{eff} ist der Zinssatz, der bei jährlicher Zinszahlung zum gleichen Ergebnis geführt hätte, wie bei der periodischen Verzinsung.

Das Jahr wird bei einer periodischen Verzinsung in gleich lange Zinsperioden unterteilt.

Beispiel: $m = 2$ (halbjährliche Zahlungsweise)
 $m = 4$ (vierteljährliche Zahlungsweise)
 $m = 12$ (monatliche Zahlungsweise)

Bei einem Jahreszins p ist der **Periodenzinssatz** $p_* = \frac{p}{m}$

p ist der **nominale** Zinssatz

$$p_{eff} = \left(\left(1 + \frac{p_*}{100} \right)^m - 1 \right) \cdot 100 \quad (p \neq i(!))$$

$$= \left(\left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100} \right)^m - 1 \right) \cdot 100$$

z.B.:

$$p = 8; \quad m = 2$$

$$\Rightarrow p_{eff} = \left((1 + 0,04)^2 - 1 \right) \cdot 100 \approx 8,16$$

$$p = 8; \quad m = 12$$

$$\Rightarrow p_{eff} = \left(\left(1 + \frac{1}{150} \right)^{12} - 1 \right) \cdot 100 \approx 8,29$$

Stetige Verzinsung (als Grenzwertbetrachtung):

$$k_e = \lim_{m \rightarrow \infty} k_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m} \right)^m = k_0 \cdot e^i \quad (\text{Das ist schwer zu zeigen, dennoch richtig})$$

$$\text{mit } i = 8\% \Rightarrow k_e = k_0 \cdot e^{\frac{8}{100}} = k_0 \cdot e^{0,08} \approx k_0 \cdot 1,0832$$

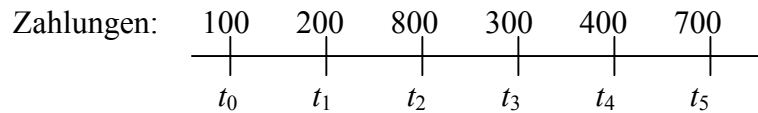
$$m = 360 \Rightarrow k_e = k_0 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{360} \right)^{360} \approx k_0 \cdot 1,0832$$

also scheint das ja zu stimmen...

3.3 Zahlungsströme

Ein Zahlungsstrom $\langle A_t \rangle_{t=0,1,2,\dots,n}$ ist eine endliche Folge von Zahlungen, die zum Zeitpunkt t geleistet werden.

Z.B.:



Der Barwert eines Zahlungsstromes

$$k_0 = \sum_{t=0}^n A_t q^{-t} \quad \text{das } q^{-t}, q = 1 + i \text{ soll abzinsen}$$

Beispiel von oben mit 5% Zinsen:

$$\begin{aligned} k_0 &= 100 + 200 \cdot 1,05^{-1} + 800 \cdot 1,05^{-2} + 300 \cdot 1,05^{-3} + 400 \cdot 1,05^{-4} + 700 \cdot 1,05^{-5} \\ &= 2.152,80 \text{ DM} \end{aligned}$$

Das heißt: Ob man sofort 2.152,80 DM für 5 Jahre zu 5% Zinsen anlegt, oder aber diese Ratenzahlung vereinbart, ist egal.

Der Endwert eines Zahlungsstromes:

$$k_n = \sum_{t=0}^n A_t \cdot q^{n-t} = k_0 \cdot q^n \quad (\text{letzters stützt die Behauptung von oben!})$$

Wieder ein Beispiel:

$$\begin{aligned} k_n &= 100 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot 1,05^4 + 800 \cdot 1,05^3 + 300 \cdot 1,05^2 + 400 \cdot 1,05^1 + 700 \\ &= 2.152,80 \cdot 1,05^5 \\ &= 2.747,58 \end{aligned}$$

Der Wert zum Zeitpunkt m :

$$k_m = \sum_{t=0}^n A_t \cdot q^{m-t}, \text{ also bis } m \text{ wird aufgezinnt und danach wieder abgezinst.}$$

Wieder ein Beispiel für $m=3$:

$$\begin{aligned} k_3 &= 100 \cdot 1,05^3 + 200 \cdot 1,05^2 + 800 \cdot 1,05^1 + 300 + 400 \cdot 1,05^{-1} + 700 \cdot 1,05^{-2} \\ &= \text{Barwert} \cdot 1,05^m \\ &= 2.492,14 \end{aligned}$$

Äquivalenzprinzip

Zwei Zahlungsströme $\langle A_t \rangle$ und $\langle B_t \rangle$ sind äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt k den gleichen Wert haben.

z.B.:

t	0	1	2	3	4	5
A_t	600	400	0	1000	0	1000
B_t	400	400	400	600	600	600

$$p = 5$$

$$k_{5_{A_t}} = 600 \cdot 1,05^5 + 400 \cdot 1,05^4 + 0 + 1000 \cdot 1,05^2 + 1000 = 3.354,47$$

$$k_{5_{B_t}} = 400 \cdot 1,05^5 + 400 \cdot 1,05^4 + 400 \cdot 1,05^3 + 600 \cdot 1,05^2 + 600 \cdot 1,05^1 + 600 = 3.351,26$$

oder

t	0	1	2	3	4	5
A_t	500	500	500	500	500	500
B_t	0	0	1000	0	1000	1000

$$p = 5$$

$$k_{5_{A_t}} = 500 \cdot 1,05^5 + 500 \cdot 1,05^4 + 500 \cdot 1,05^3 + 500 \cdot 1,05^2 + 500 \cdot 1,05^1 + 500 = 3.400,96$$

$$k_{5_{B_t}} = 1000 \cdot 1,05^3 + 1000 \cdot 1,05 + 1000 = 3.207,63$$

Rentenrechnung

Jährlich konstante Raten bei fester Laufzeit

Nachüssige Renten:

Wird eine Rente r jährlich nachschüssig gezahlt, so ist der Endwert R_n bei einem Zinssatz p nach n Jahren:

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \dots + r \cdot q + r \\ &= r(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) \end{aligned}$$

ist eine Geometrische Reihe, also

$$= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad q > 1$$

Beispiel:

$r=1000$; Nachschüssig;

$q=1,07$

$n=20$

$$\Rightarrow R_n = 1000 \cdot \frac{1,07^{20} - 1}{0,07} \approx 40.995$$

Soll die Rente aus einem Anfangskapital k_0 stammen, so ist der Endwert des Kapitals k_n

$$K_n = K_0 \cdot q^n - R_n \quad (\text{Ehrliche Menschen setzten } K_n = 0, \text{ also } K_0 \cdot q^n = R_n !)$$

Beispiel:

$K_0 = 50.000$; $p = 6$; $N = 10$; $k_n = 0$

$r = ?$

$$r = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} \quad \text{da } K_n = 0$$

$$= K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

$$= 50.000 \cdot 1,06^{10} \cdot \frac{0,06}{1,06^{10} - 1} = 6.793,40$$

Zusammenfassung der Formeln für die **nachschüssige** Rente:

Endwert: $R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Barwert: $R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n}$

Rente: $r = R_n \frac{q-1}{q^n - 1} = R_0 \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1}$

Laufzeit: $n = \frac{\ln\left(\frac{R_n(q-1)}{r} + 1\right)}{\ln q}$

Vorschüssige Renten:

Vorschüssige Renten leiten sich aus den nachschüssigen Renten ab, da hier nur einfach ein Jahr länger Verzinst wird:

$$\begin{aligned}
 R'_n &= R_n \cdot q \\
 &= r(q^n + q^{n+1} + \dots + q) \quad [= rq(q^{n-1} + q^n + \dots + 1)] \\
 &= r\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1\right) = r\left(\frac{q^{n+1} - q}{q - 1}\right) = r\left(\frac{q(q^n - 1)}{q - 1}\right) \\
 &= rq \frac{(q^n - 1)}{q - 1}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung der Formeln für die vorschüssige Rente:

Endwert: $R'_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$

Barwert: $R'_0 = R'_n \cdot q^{-n} = r \frac{q^n - 1}{(q - 1) \cdot q^n} \cdot q = r \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}}$

Rente: $r = R'_n \frac{q - 1}{q^{n+1} - q} = R'_0 \frac{q^n - q^{n-1}}{q^n - 1}$

Laufzeit: $n = \frac{\ln\left(\frac{R'_n(q - 1)}{rq} + 1\right)}{\ln q}$

Aufgabe 1

$$R_0 = 1.000 \cdot \frac{1,06^{20} - 1}{0,06 \cdot 1,06^{20}} = 11.469,92$$

$$R'_0 = 11.469,92 \quad \text{da } R_0 = R'_0 \text{ (Äquivalenz!)}$$

$$\Rightarrow r' = 11.469,92 \cdot \frac{1,06^{15} - 1,06^{14}}{1,06^{15} - 1} \approx 1.114,13$$

Aufgabe 2

$$K_0 = 300.000 \quad n = 10 \quad p = 5$$

$$r' = 300.000 \cdot \frac{1,05^{10} - 1,05^9}{1,05^{10} - 1} \approx 37.001,30$$

$$\left[r = 300.000 \cdot \frac{1,05^{11} - 1,05^{10}}{1,05^{10} - 1} \approx 38.851,37 \right]$$

Aufgabe 3

$$r = 5.000 \quad n = 20 \quad R_0 = 80.000$$

$$80.000 = 5.000 \cdot \frac{q^{20} - 1}{(q-1)q^{20}}$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot q^{21} - 16 \cdot q^{20} = q^{20} - 1$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot q^{21} - 17 \cdot q^{20} + 1 = 0$$

was eine Gleichung 21. Grades ist und daher analytisch nicht lösbar. Es gibt nur Näherungslösungen für einen solchen Fall.

Aufgabe 4

Der Endwert R_{10} der ersten Zahlung ist der Barwert R_0 der zweiten Zahlung.

$$R_{10} = 1.000 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$$

$$K_0 = 2.000 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q^{11} - q^{10}}$$

$$\Rightarrow 1.000 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 2.000 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q^{11} - q^{10}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{1}{q^{10}(q - 1)} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{q^{10}} \Leftrightarrow q^{10} = 2$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[10]{2} \approx 1,0718$$

Mit $q = 1,0718$:

$$R_{10} = 1.000 \cdot \frac{1,0718^{10} - 1}{0,0718} \approx 13.947,66$$

$$R_{20} = 2.000 \cdot \frac{1,0718^{10} - 1}{0,0718} \approx 27.895,31$$

$$\Rightarrow K_0 = \frac{R_{20}}{1,072^{10}} \approx 13.918,20$$

Das passt sogar fast. Der Rest beruht auf Rundungsfehlern.

Aufgabe 5

$$0,5 \cdot q^{11} = 1 \Rightarrow q^{11} = 2 \Rightarrow q = \sqrt[11]{2} \approx 1,065 \Rightarrow p = 6,05$$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned} K_5 &= 500.000 \cdot 1,06^5 - 10.000 \cdot \underbrace{1,03}_{=1 + \left(0,06 \cdot \frac{30 \cdot 6}{360}\right)} \cdot 1,06^4 - 5.000 \cdot 1,06^4 - 10.000 \cdot 1,06^3 \\ &= 637.886,73 \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (nächstes Blatt)

$$\begin{aligned} s &= 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} = \underline{\underline{2\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0 ; \text{ für } \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

oder auch z.z. $\left| \frac{\sqrt{n}}{n} \right| < \varepsilon$ für *hinreichend* große n

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{n} < \varepsilon \cdot \sqrt{n} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{n} \cdot \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow n > \underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon^2}}}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
0,\overline{17} &= \frac{17}{100} + \frac{17}{100^2} + \frac{17}{100^3} + \dots \\
&= \frac{17}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} \right) \\
&= \frac{17}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{17}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{17}{99}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Grenzwert angenommen : $g = 3$

$$\begin{aligned}
&\left| 3 + \frac{(-1)^n}{2n} - 3 \right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{2n} \right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2n \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2\varepsilon} < n}} \\
&\text{mit } \varepsilon = 0,001 \Rightarrow \underline{\underline{n > 500}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$a_n = 7 \cdot 0,9^n + 2 - \frac{n-1}{3n+8} \quad \text{für } n > 0; n \in \mathbb{N}$$

gesucht : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\begin{aligned}
\text{also : } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 7 \cdot 0,9^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n+8} &\quad \left[\frac{(n-1) \cdot \frac{1}{n}}{(3n+8) \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{8}{n}} \right] \\
&= 0 + 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{8}{n}} \\
&= 2 - \frac{1}{3} = 1 \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Unterhährige Raten:

Es sollen m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (ein Jahr) erfolgen.

„Nachschüssiges“ Problem:

Durch welche nachschüssige Jahresrate R_e können die unterjährigen Raten bei linearer Betrachtungsweise ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
 R_e &= r + r \cdot \left(1 + i \cdot \frac{1}{m}\right) + r \cdot \left(1 + i \cdot \frac{2}{m}\right) + \dots + r \cdot \left(1 + i \cdot \frac{m-2}{m}\right) + r \cdot \left(1 + i \cdot \frac{m-1}{m}\right) \\
 &= m \cdot r + \frac{r \cdot i}{m} (1 + 2 + \dots + (m-2) + (m-1)) \\
 &= m \cdot r + \frac{r \cdot i}{m} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot m \\
 &= r \cdot \left(m + \frac{i}{2}(m-1)\right)
 \end{aligned}$$

Beispiel:

$$r = 100; \quad i = 6\%; \quad m = 12$$

$$\begin{aligned}
 R_e &= 12 \cdot 100 + 0,03 \cdot 11 \cdot 100 \\
 &= 1.200 + 33 = 1.233
 \end{aligned}$$

„Vorschüssiges“ Problem:

$$\begin{aligned}
 R_e &= r \cdot (1+i) + r \cdot \left(1 + i \frac{m-1}{m}\right) + r \cdot \left(1 + i \frac{m-2}{m}\right) + \dots + r \cdot \left(1 + i \frac{1}{m}\right) \\
 &= m \cdot r + \frac{r \cdot i}{m} (m + (m-1) + (m-2) + \dots + 1) \\
 &= m \cdot r + \frac{r \cdot i}{m} \cdot \frac{m}{2} \cdot (m+1) \\
 &= m \cdot r + r \cdot \frac{i}{2} \cdot (m+1) \\
 &= r \cdot \left(m + \frac{i}{2}(m+1)\right)
 \end{aligned}$$

Beispiel:

Für einen vermögenswirksamen Sparvertrag werden 6 Jahre lang 52 DM am Monatsende eingezahlt. Der Zins beträgt 4%.

Na denn:

$$R_e = 52 \cdot 12 + \frac{0,04}{2} \cdot 11 \cdot 52 = 635,44$$

Diesen Wert interpretiert die Bank nun als jährliche Rate, welche über 6 Jahre angelegt wird. Eine monatliche Anlage über 72 Monate ist nicht die Taktik der Bank, da man dann schließlich bereits Zinseszins Effekte zwischen den Monaten erhält, die aber nur am Ende des Jahres akzeptiert werden.

$$K_6 = 635,44 \cdot \frac{1,04^6 - 1}{1,04 - 1} \approx 4.214,86$$

Nun wollen wir aber mal sehen, was passieren würde, wenn wir folgende keinesfalls abwegige Strategie verfolgen würden :

$$\overline{K}_6 = 52 \cdot \frac{(1 + (0,04 \div 12))^{72} - 1}{0,04 \div 12} = 52 \cdot \frac{(1,003)^{72} - 1}{0,003} \approx 4.223,57$$

Der Unterschied ist zwar nicht gewaltig, aber existent!

Aufgabe 6:

$$R_e = 5 \cdot \left(360 + \frac{0,04}{2} \cdot (359) \right) = 5 \cdot 367,18 = 1.835,90$$

$$K_{30} = 1.835,90 \cdot \frac{1,04^{30} - 1}{0,04} = 102.966,34$$

Ewige Rente:

Wir kein Endtermin vereinbart, so handelt es sich um eine ewige Rente. Man kann bei einer ewigen Rente zwar keinen Endwert ausrechnen, wohl aber einen Barwert:

Barwert der ewigen Rente:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \dots \\ &= r \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots \right) \\ &= r \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q}} \right) - r = r \cdot \left(\frac{1}{\frac{q-1}{q}} \right) - r = r \cdot \left(\frac{q}{q-1} \right) - r = r \cdot \left(\frac{q-q+1}{q-1} \right) \\ &= r \cdot \frac{1}{q-1} \\ \Leftrightarrow r &= K_0 \cdot (q-1) = K_0 \cdot i \end{aligned}$$

Die monatliche Rate der ewigen Rente sind also die Zinsen, die es für das eingesetzte Kapital jährlich gibt. Wer hätte das gedacht?!

Beispiel:

$$K_0 = 100.000 \quad i = 5\% \quad \Rightarrow r = 5.000$$

Vorschüssige ewige Rente:

$$K'_0 = K_0 \cdot q = r \cdot \frac{q}{q-1}$$

Tilgungsrechnung:

Problem: Eine Schuld S soll in jährlichen konstanten Beträgen (Annuitäten) nachschüssig getilgt werden.

Dabei sind :

$$A = T_k + Z_k \quad ; \quad k \in N = 1, 2, 3, \dots \text{ Jahre}$$

T : Tilgungsanteil

Z : Zinsanteil

$$A = S \cdot \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}; \quad n \text{ ist die Laufzeit}$$

$$\Leftrightarrow S = A \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1) \cdot q^n}$$

Beispiel:

$$S = 200.000; \quad i = 6\%; \quad n = 20$$

$$\Rightarrow A = 200.000 \cdot \frac{1,06^{20} \cdot 0,06}{1,06^{20} - 1} \approx 17.436,91$$

Restschuld nach k Jahren:

$$S_k = S \cdot q^k - A \cdot \frac{q^k - 1}{q-1} = S_{k-1} - A + Z_k = S_{k-1} - T_k$$

Beispiel:

$$k = 5 \quad \text{Rest von eben}$$

$$\Rightarrow S_5 = 200.000 \cdot 1,06^5 - 17.436,91 \cdot \frac{1,06^5 - 1}{0,06} = 169.351,63$$

k	S_k	Z_k	T_k	A
0	200.000	0	0	0
1	194.563,09	12.000	5.436,91	17.436,91
2	188.799,97	11.673,79	5.763,12	17.436,91
3	182.691,06	11.328,00	6.108,91	17.436,91
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	0			

Berechnung der Laufzeit:

$$\begin{aligned}
 S \cdot q^n &= A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
 \Leftrightarrow S \cdot q^{n+1} - S \cdot q^n &= A \cdot q^n - A \\
 \Leftrightarrow q^n (Sq - S - A) &= -A \\
 \Leftrightarrow q^n &= \frac{A}{(S + A - Sq)} \\
 \Rightarrow n &= \frac{\ln \frac{A}{(S + A - Sq)}}{\ln q}
 \end{aligned}$$

Beispiel:

$$S = 100.000 ; A = 10.000 ; i = 6\% \Rightarrow q = 1.06$$

$$n = \frac{\ln \frac{10.000}{100.000 + 10.000 - (100.000 \cdot 1,06)}}{\ln 1,06} \approx 16 \text{ Jahre}$$

Problem:

Bei Auszahlung ist ein Disagio D fällig. Wie groß ist die effektive Verzinsung?

P_{nom}, k, A ist festgelegt.

$$S'_0 = S_0 - D \text{ (wird ausbezahlt)}$$

S_0 ist zu verzinsen.

$$\begin{aligned}
 \text{Ansatz für den effektiven Zins: } & \sum_{t=1}^k A \cdot q_{eff}^{-t} + S_k \cdot q_{eff}^{-k} = S'_0 = S_0 - D \\
 = & \sum_{t=1}^k A \cdot q_{eff}^{-t} + S_k \cdot q_{eff}^{-k} + D = S_0 \\
 \Rightarrow S_k &= S_0 \cdot q_{nom}^k - A \frac{q_{nom}^k - 1}{q_{eff} - 1}
 \end{aligned}$$

Diese Funktion ist nur noch mit numerischen Techniken, nicht aber mit analytischen Techniken zu lösen (Näherungsverfahren).

z.B.

$$S_0 = 100.000 \quad D = 5.000 \quad i_{nom} = 5\% \quad n = 5 \text{ Jahre} \quad \text{Tilgung} = 1\%$$

$$A = \text{Zins} + \text{Tilgung} = 5.000 + 1.000 = 6.000$$

$$S_5 = 100.000 \cdot 1,05^5 - 6.000 \frac{1,05^5 - 1}{0,05} = 94.474,37 \text{ DM}$$

Aufgabe 7

a)

$$S = 100.000 \quad A = 9.000 \quad T = 1\% \quad p = 8$$

$$n = \frac{\ln \frac{A}{(S + A - Sq)}}{\ln q} = \frac{\ln \frac{9.000}{109.000 - (100.000 \cdot 1,08)}}{\ln 1,08} \approx 28,593 \text{ Jahre}$$

b)

$$9.000 = r \left(m + \frac{i}{2} \cdot (m+1) \right) = r(12 + 0,04 \cdot 13) \Rightarrow r = \frac{9.000}{(12 + 0,04 \cdot 13)} \approx 718,85$$

Weitere Aufgaben:

Ein Betrag von 24.000 wird Zinseszinslich in einem Sparbrief investiert. Nach 12 Jahren werden 50.000 ausbezahlt.

a) Wie hoch ist der Jahreszins

b) wie hoch ist der jeweilige Jahreszins, wenn der Zins in den Jahren 1-6 um 2% unter dem der Jahre 7-12 liegt.

a)
$$24.000 \cdot q^{12} = 50.000 \Rightarrow q = 1,063$$

b)

$$24.000 \cdot q^6 \cdot (q + 0,02)^6 = 50.000$$

$$\Leftrightarrow q^6 (q + 0,02)^6 = \frac{50.000}{24.000} \Leftrightarrow q(q + 0,02) = \sqrt[6]{\frac{50.000}{24.000}}$$

$$\Leftrightarrow q^2 + 0,02q - \sqrt[6]{\frac{50}{24}} = 0$$

$$\Rightarrow q_{1/2} = -0,01 \pm \sqrt{(0,01)^2 + \sqrt[6]{\frac{50}{24}}} = 1,053$$

Ein Kapital K_0 ist anzulegen. Was ist günstiger:

a) Anlage auf ein Sparbuch zu 9,75% über 5 Jahre

b) Anlage in 10,5% Anleihen mit Jahrescoupon mit 5 Jähriger Laufzeit. Die fälligen Zinsen werden zu 5% Zinsen auf ein Sparbuch gebracht.

a)

$$i = 0,0975 \quad n = 5$$

$$K_5 = K_0 \cdot 1,0975^5 = K_0 \cdot 1,5923$$

b)

$$i = 0,105 \quad \bar{i} = 0,05$$

$$K_5 = K_0 \cdot 0,105 \cdot \frac{1,05^5 - 1}{0,05} + K_0$$

$$= K_0 \cdot \left(0,105 \cdot \frac{1,05^5 - 1}{0,05} + 1 \right) \approx 1,5802$$

Das Sparbuch ist also etwas günstiger.

4.0 Integral und Differentialrechnung

4.0 Grenzwert von Funktionen

Grenzwert einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a \in \mathbb{R}$.

Def.: Wenn für eine beliebige Folge $\langle x_i \rangle$ aus dem Definitionsbereich einer Funktion f mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ und $x_k \neq a$ die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_k) \rangle$ den Grenzwert g hat, d.h. $\lim_{x_k \rightarrow a} f(x) = g$, so ist g der Grenzwert der Funktion f an der Stelle a .

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$

Beispiel:

$f(x) = x^2$ nun wollen wir die Stelle $a = 2$ begutachten:

Dazu nehmen wir die Folge an:

a)

$$x_k = 2 + \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow f(x_k) = \left(2 + \frac{1}{k}\right)^2 = 4 + \frac{4}{k} + \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{4}{k} + \frac{1}{k^2}\right) = 4$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1 \\ x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$x_k = 1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow f(x_k) = 1 + x_k = 2 + \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 2$$

$$y_k = 1 - \frac{1}{k} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow f(y_k) = y_k = 1 - \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = 1$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \neq 0 \\ 4711 & \text{für } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

d)

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

e)

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ gibt es nicht.}$$

f)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$f(2 + 0,001) = 4,001$$

$$f(2 - 0,001) = 3,999$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$$

Def.: Sei die Folge $\langle x_n \rangle$ eine beliebige Folge, für die gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $x_n < a$ ($x_n > a$), dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_n) \rangle = g^-$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_n) \rangle = g^+$) der linksseitige Grenzwert (der rechtseitige Grenzwert) von f an der Stelle a .

g ist Grenzwert an der Stelle $a \Leftrightarrow g^+ = g^- = a$

Schreibweise:

$$g^- = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

$$g^+ = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Beispiele:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1 \\ x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2 = g^+ \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1 = g^-$$

b)

$$f(x) = |x|$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0+0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0+0} x = 0 = g^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0-0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0-0} -x = 0 = g^- \end{array} \right\} g = g^+ = g^-$$

c)

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} = 1 = g^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{x} = -1 = g^-$$

d)

$$f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$f(0,001) = \frac{2}{1 + 1,07 \cdot 10^{300}} \cong 0$$

$$f(-0,001) = \frac{2}{1 + 1,07 \cdot 10^{-302}} \cong 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 2$$

Der Grenzwert einer Funktion $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Eine Folge $\langle x_k \rangle$ hat zwar keinen Grenzwert, jedoch wachsen alle Folgenglieder über alle positiven oder negativen Schranken hinaus. In diesem Fall kann die Folge der Funktionswerte dennoch einen Grenzwert g haben.

Beispiele:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$x_k = k; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

$$y_k = -k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(y_k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-k} = 0$$

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = g$

Beispiel:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2-x} \right) = 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2-x} \right)$$

$$f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

4.1 Stetigkeit von Funktionen

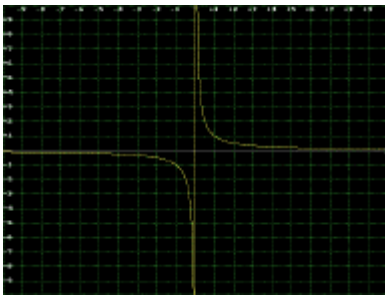
Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x); f(x_0) \text{ existiert und } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ansonsten ist f unstetig.

Beispiele für unstetige Funktionen:

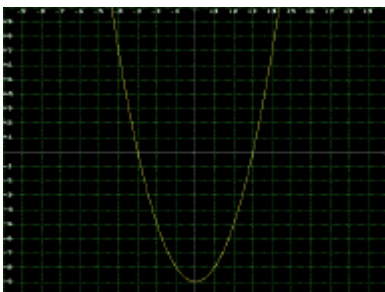
$$f(x) = \frac{1}{x} :$$



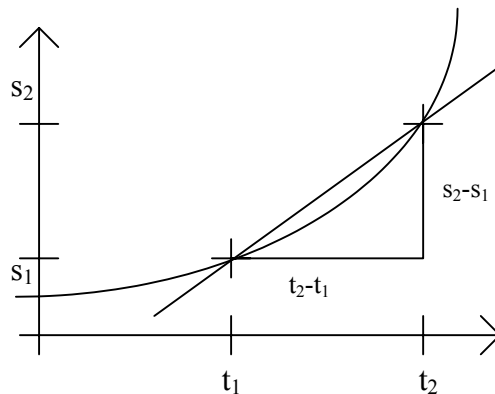
$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \text{ ebenfalls mächtig unstetig (aber ohne Bild!)}$$

Beispiel für eine stetige Funktion:

$$f(x) = x^2 - 9 :$$



4.2 Ableitungen von Funktionen:



$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \tan \alpha \quad (\text{Differenzenquotient})$$

Nun ist es das erklärte Ziel der Differenzierung, die ungenaue Tangente in unserem Bildchen bitteschön so nahe an die Stelle t_1 heranzubringen, daß das Δt im Quotienten gleich null wird, was ja nicht erlaubt ist, aber bedeutet, daß man die Geschwindigkeit (Steigung) direkt zum Zeitpunkt t_1 kennen würde.

Also schreiben wir:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \text{ wobei } t_0 \text{ ein beliebig kleiner Abstand zu } t \text{ sei.}$$

Man schreibt aber auch:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \text{Differenzialquotient} = \text{der Ableitung von } s \text{ an der Stelle } t_0, \text{ oder einfach die Steigung der Tangente an der Stelle } t_0, \text{ bzw. die Steigung der Funktion an dem Punkt } (t_0, s(t_0))$$

Def.: Eine Funktion f heißt im Punkt x_0 differenzierbar:

1) wenn f in x_0 differenzierbar ist und

$$2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \left. \frac{d(f(x))}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}$$

existiert

$f'(x_0)$ heißt Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 . $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente von f durch x_0 .

f heißt in einem Intervall $]a, b[$ differenzierbar, wenn f in jedem Punkt im Intervall $]a, b[$ differenzierbar ist.

Beispiel:

1.)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2; x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0,5x^2 - 0,5x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0,5(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0,5(\cancel{x-x_0})(x+x_0)}{\cancel{x-x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0,5(x+x_0) \\ &= 0,5x_0 + 0,5x_0 = x_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x$$

$$f(x) = x^n \quad ; n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x_0x^{n-2} + \dots + x_0^{n-2}x + x_0^{n-1})^*) \\ &= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1}}_{n\text{-mal}} \\ &= n \cdot x_0^{n-1} \end{aligned}$$

*) Dieses Ergebnis entstammt der Polynomdivision $(x^n - x_0^n) \div (x - x_0)$, deren Ergebnis aber jeder hier sehen und zum eigenen Vergnügen gerne wiederholen darf. Ich schreibe sie hier jedenfalls nicht hin (so ein Vergnügen ist der Formel-Editor wirklich nicht!!).

2.)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ganz nebenbei bemerkt gilt auch hier schlicht die Regel für $f(x) = x^n$, da $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Ableitungsregeln:**Ableitungen einer Funktion mit einem konstanten Faktor:**

Sei $f(x_0)$ in x_0 ableitbar (vorausgesetzt), dann gilt:

Satz: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

Beweis:

$$(a \cdot f(x))' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a \cdot f(x) - a \cdot f(x_0)}{x - x_0} = a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \cdot f'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = \pi \cdot \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

Ableitung einer Summe von Funktionen:

Sei $f(x_0)$ und $g(x_0)$ in x_0 ableitbar (wieder vorausgesetzt), dann gilt:

Satz: $(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0)$

Beweis:

$$\begin{aligned} (f(x_0) + g(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Beispiel:

$$h(x) = 3\sqrt{x} + 4x^2 \Rightarrow h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 8x$$

Ableitung eines Produktes:

Sei $u(x_0)$ und $v(x_0)$ in x_0 ableitbar, dann gilt:

$$\text{Satz: } (u(x_0) \cdot v(x_0))' = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & (u(x) \cdot v(x))' \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) + u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x) \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \\ &= u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x) \end{aligned}$$

$$\text{allgemein: } (u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot \dots \cdot u_n + \dots + u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n'$$

z.B.

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 + \sqrt{x} \cdot 2x$$

$$f(x) = 2x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 [= 2x^9]$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x \cdot x^3 \cdot x^4 + 2x^2 \cdot 3x^2 \cdot x^4 + 2x^2 \cdot x^3 \cdot 4x^3 = 4x^8 + 6x^8 + 8x^8 = 18x^8$$

Beispiel:

$$f(x) = 0,2x^3 - 0,3x^2 - 3,6x + 1 \quad \text{gesucht sei } x \text{ mit } f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 0,6x^2 - 0,6x - 3,6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \wedge x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$$

Um den Punkt zu ermitteln, schreibt man:

$$P_1 = (3, f(3)) \wedge P_2 = (-2, f(-2))$$

Ableitung eines Quotienten:

Sei $u(x_0)$ und $v(x_0)$ in x_0 ableitbar, dann gilt:

$$\text{Satz: } \left(\frac{u(x_0)}{v(x_0)} \right)' = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{(v(x_0))^2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - v(x+\Delta x) \cdot u(x)}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - v(x+\Delta x) \cdot u(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x)}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)} \left(\frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} - \frac{u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{(v(x))^2} (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)) \end{aligned}$$

Kurz :

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^3 - \sqrt{x} \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^3}{2x^6\sqrt{x}} - \frac{3x^2\sqrt{x}}{x^6} = \frac{1}{2x^3\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x^4}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^3 - x^2 - x + 7} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+5) \cdot (2x^3 - x^2 - x + 7) - (x^2 + 5x - 6) \cdot (6x^2 - 2x - 1)}{(2x^3 - x^2 - x + 7)^2}$$

und nach dem Außmultiplizieren und Zusammenfassen schließlich:

$$f'(x) = \frac{-2x^4 - 20x^3 + 40x^2 + 26x^2 + 2x + 29}{4x^6 - 4x^5 - 3x^4 + 30x^3 - 13x^2 - 14x + 14}, \text{ aber nagelt mich nicht d'rauf fest!}$$

Erweiterte Quotientenregel für Sonderfall:

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \frac{-v'(x)}{v^2(x)}, \text{ welcher sich aus der allgemeinen Quotientenregel ableitet...}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Die Kettenregel:

Sei $f(x_0)$ und $g(x_0)$ in x_0 ableitbar (wieder vorausgesetzt), dann gilt:

Satz: $(f(g(x_0)))' = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0))$ [Innere mal äußere Ableitung]

Beweis:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u - \Delta x) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \underbrace{\frac{df(u)}{du}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{innere}}$$

Beispiel:

Noch mal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \left(\left(\sqrt{x}\right)^{-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(-\left(\sqrt{x}\right)^{-2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 5} \Rightarrow f'(x) = (3x^2 - 2) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x^3 - 2x + 5}}\right)$$

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)^2 \hat{=} f(u(x)) \hat{=} u \circ f(x)$$

$$f(u) = u^3 \quad u(x) = x^2 + 2x - 3 \quad f'(u) = 3u^2 = \frac{dt}{du} \quad u'(x) = 2x + 2 = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 3u^2 (2x + 2) = 3(x^2 + 2x - 3)^2 (2x + 2)$$

Ableitungstablau:

Funktion	Ableitung
x^a	$ax^{a-1} ; x > 0, a \in \mathbb{R}$
a^x	$\ln a \cdot a^x ; a > 0, x \in \mathbb{R}$
e^x	$\ln e \cdot e^x = e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x} ; x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e ; x > 0$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Beispiele:

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f(x) = \ln(3x^2 + 5) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 5} \cdot 6x$$

Ableitung mit Hilfe der Umkehrfunktion

$y = f(x)$ sei gegeben. $f'(x)$ ist gesucht.

Sei $g(y) = x$ die nach x umgeformte Funktion $f(x)$

[Die Umformung muß eindeutig sein]

Beispiel:

$$y = f(x) = 3x + 7 \Leftrightarrow x = \frac{y-7}{3} = g(y), \text{ also die umgekehrte Funktion.}$$

[Die Umkehrfunktion wäre es erst nach der Vertauschung von y und x]

Die umgekehrte Funktion leiten wir nach y ab:

$$\frac{dg(y)}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Beispiel:

a)

$$f(x) = \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 = g(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 2y = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{da } y = \sqrt{x})$$

b)

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n = g(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = n \cdot y^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

c)

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

$$f'(x) = m \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \left(x^{\frac{1}{n}-1}\right)$$

$$= \frac{m}{n} \left(x^{\frac{m-1}{n}}\right) \left(x^{\frac{1-n}{n}}\right) = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n} + \frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1+1-n}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

Ableiten nach Logarithmen:

z.B. $f(x) = x^x ; x > 0$

$$\ln[f(x)] = \ln x^x = x \cdot \ln x$$

Regel:

$$[\ln[f(x)]]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln[f(x)]]' \quad (\text{umgeformt})$$

Beispiel:

a)

$$f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot [\ln[f(x)]]' = x^x \cdot (x \cdot \ln x)' = x^x \cdot (1 + \ln x)$$

b)

$$f(x) = x^{(x^2+2)} ; x > 0$$

$$f'(x) = x^{(x^2+2)} \cdot [\ln[f(x)]]' = x^{(x^2+2)} \cdot ((x^2+2) \cdot \ln x)' = x^{(x^2+2)} \cdot \left(2x \cdot \ln x + \frac{x^2+2}{x}\right)$$

Schreibweisen:

$$f(x)$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \left((f'(x))' \right)'$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n\text{te Ableitung} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Die erste Ableitung gibt eine Steigung, die zweite Ableitung die Änderung der Steigung.

Allgemein:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\vdots$$

$$p^{(n)}(x) = a_n \cdot n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = a_n \cdot n!$$

$$p^{(n+1)}(x) = 0$$

$$n! = \begin{cases} n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 1 \text{ für } n = 0 \end{cases}$$

Speilerei:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{IV}(x) = \sin x$$

$$\vdots$$

$$f^{(83)}(x) = f'''(x) = -\cos x \quad \text{da } 83 \bmod 4 = 3$$

$$f^{(84)}(x) = f(x) = \sin x$$

Aufgabe 1:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 2x^2 - 15x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 5x) \cdot (x + 3)}{(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} x^2 - 5x = 24$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) \rightarrow +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 5}{x - 3} \rightarrow \infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 2} = -1^2 - 4 \cdot 1 - 3 = -8$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(4x - 2)}{x^2(x + 1)} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 6x^2 + 5x - 17}{-3x^3 + 120.000x^2 - 1} = -1, \text{ da die höchsten Exponenten am schnellsten wachsen.}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= -4x + |4 - x^2| + 11 \\ &= \begin{cases} -4x + 4 - x^2 + 11 & ; \quad -2 \leq x \leq 2 \\ -4x + x^2 - 4 + 11 & ; \quad x < -2 \vee x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x^2 - 4x + 15 & ; \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 7 & ; \quad x < -2 \vee x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(2) = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} (x^2 - 4x + 7) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-0} (-x^2 - 4x + 15) = 3 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$f(-2)$ ist analog

$$\text{b) } f(x) = \frac{4x + |2 - 4x| + 1}{x - \frac{1}{2}}. \text{ Die Funktion ist für } x = \frac{1}{2} \text{ gar nicht definiert, daher auch niemals stetig.}$$

- c) Nun eine kleiner Änderung, damit wir das Loch in der Funktion mit einem selbstgebastelten Funktionswert stopfen könnten. Dieser Wert wäre der Grenzwert an der Stelle $x = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{|2-4x|}{x-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2-4x|}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \begin{cases} \frac{2-4x}{x-\frac{1}{2}} & ; x < \frac{1}{2} \\ \frac{4x-2}{x-\frac{1}{2}} & ; x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{4x-2}{x-\frac{1}{2}} = 4 \quad \text{Der Grenzwert wird hier mit Hilfe der Polynomdivision ermittelt}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} \frac{2-4x}{x-\frac{1}{2}} = -4$$

3a)

$$f(x) = \sin\left(3x^2 + \sqrt{\tan(x^3)}\right)$$

$$f'(x) = \cos\left(3x^2 + \sqrt{\tan(x^3)}\right) \cdot \left(6x + \frac{1}{2\sqrt{\tan(x^3)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3)} \cdot (3x^2)\right)$$

b)

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{\ln^2(6x + 2)}$$

$$f'(x) = \frac{\left[3x^2 \cdot \ln^2(6x + 2)\right] - \left[(x^3 - 5) \cdot \frac{12 \ln(6x + 2)}{6x + 2}\right]}{\ln^4(6x + 2)}$$

NR:

$$\left[(\ln(6x + 2))^2\right]' = 2 \cdot \ln(6x + 2) \cdot \frac{1}{6x + 2} \cdot 6 = \frac{12 \cdot \ln(6x + 2)}{6x + 2}$$

c)

Da kein x drin ist, ist das Ganze als Konstante zu definieren. Daher ist $f'(x) = 0$

d)

$$f(x) = (a^2 + b^2) \cdot e^{x^3} + \ln\left(\frac{x^2 + 7x - 5}{x^3 - 4x}\right)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(a^2 + b^2) \cdot e^{x^3} + \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 7x - 5} \cdot \left[\frac{x^2 + 7x - 5}{x^3 - 4x}\right]' \\ &= 3x^2(a^2 + b^2) \cdot e^{x^3} + \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 7x - 5} \cdot \frac{(2x + 7)(x^3 - 4x) - (x^2 + 7x - 5)(3x^2 - 4)}{x^3 - 4x} \end{aligned}$$

e)

$$f(x) = \frac{5}{\ln(x)} = 5 \cdot (\ln x)^{-1}$$

$$f'(x) = -5 \cdot (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{5}{x \cdot \ln^2 x}$$

f)

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{\sin(2x)}$$

$$f'(x) = \frac{\left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right) \cdot \sin(2x) - x \ln x \cdot 2 \cdot \cos(2x)}{\sin^2(2x)}$$

Bestimmung von Extrema

- a) Der Punkt (x_H, y_H) heißt relatives Maximum von $f(x)$, wenn es eine ε -Umgebung $U(\varepsilon, x_H)$ gibt, in der für alle x aus $U(\varepsilon, x_H)$ gilt, $f(x) \leq f(x_H)$.
- b) Der Punkt (x_T, y_T) heißt relatives Minimum von $f(x)$, wenn es eine ε -Umgebung $U(\varepsilon, x_T)$ gibt, in der für alle x aus $U(\varepsilon, x_T)$ gilt, $f(x) \geq f(x_T)$.

Wenn in x_e gilt, daß f ein Extremum (relatives Maximum oder relatives Minimum) hat und f in einer Umgebung von x_e differenzierbar ist, so ist $f'(x_e) = 0$ (notwendige Bedingung.).

Wenn $f(x)$ an der Stelle x_e zweimal differenzierbar ist mit $f'(x_e) = 0$ und $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), dann hat f an der Stelle x_e ein relatives Maximum (relatives Minimum) (hinreichende Bedingung)

Beispiele:

1)

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5$$

$$p'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x$$

$$p''(x) = 12x^2 - 12x + 6$$

$$p'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 6x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee 4x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{3}{2}} \text{ Wurzel ist nicht definiert}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ ist einzige Nullstelle}$$

$$p''(x) = 6 \Rightarrow \text{an der Stelle } x = 0 \text{ ist ein Minimum } (P(0; -5))$$

2)

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$f''(x) = \left(-\sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \left(\cos \frac{1}{x} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{x^3} \right) \right) = -\frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \cdot \cos \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0 \vee \cos \frac{1}{x} = 0$$

Da $\left(-\frac{1}{x^2} \right)$ niemals gleich null werden kann, ist nur der cos zu testen.

$$\begin{aligned}\cos \frac{1}{x} = 0 \text{ für } \frac{1}{x} &= \left\{ \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{3\pi}{2}; \pm \frac{5\pi}{2}; \dots \right\} \\ &= (2n-1) \cdot \frac{\pi}{2}; n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots \\ \Rightarrow x &= \left\{ \frac{2}{(2n-1) \cdot \pi}; n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots \right\}\end{aligned}$$

Dort mögen also Extrema sein. (Wer's nicht glaubt, der sollte den Graphen befragen...)

Nun müssen wir noch die notwendige Bedingung abtesten, wobei wir nur das Vorzeichen abtesten wollen.

$$\begin{aligned}f''\left(\frac{2}{(2n-1) \cdot \pi}\right) &\neq 0 \quad \left[\frac{2}{x^3} \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 \text{ für alle } n \right] \\ \Rightarrow -\frac{1}{x^4} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} &< 0 \text{ für } n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots \\ \Rightarrow -\frac{1}{x^4} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} &> 0 \text{ für } n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots\end{aligned}$$

Bestimmung von Wendepunkten:

Def.: In einem Wendepunkt ist die Steigung der Funktion ein rel. Maximum (rel. Minimum) \Rightarrow In der ersten Ableitung dieser Funktion stellen sie daher ein rel. Extremum dar. Wenn eine Funktion f an der Stelle x_w dreimal differenzierbar ist, mit $f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_w) \neq 0$, dann hat f in x_w einen Wendepunkt.

Beispiel:

1)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x}{x^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{e^x x^2 - 2e^x x}{x^4} = \frac{e^x x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3} \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{(e^x + e^x(x-2)) \cdot x^3 - e^x(x-2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{(e^x + e^x(x-2)) \cdot x - e^x(x-2) \cdot 3}{x^4} \\ &= \frac{e^x[(1+(x-2)) \cdot x - (3x-6)]}{x^4} = \frac{e^x[x + x^2 - 2x - 3x - 6]}{x^4} = \frac{e^x[x^2 - 4x - 6]}{x^4}\end{aligned}$$

$$f''(x) = 0$$

da e^x nie null $\Rightarrow x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-6}$ nicht lösbar \Rightarrow keine Wendepunkte.

2)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Da $f'''(x) = 6$ immer größer null liegt auf jeden Fall ein Wendepunkt vor.

Bestimme die Gerade durch den Wendepunkt:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f''(x) = 2x - 4$$

$$f'''(x) = 2 > 0$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = -\frac{1}{3} \quad f'(2) = -1$$

An dem Punkt $P\left(2; -\frac{1}{3}\right)$ liegt ein Wendepunkt mit der Steigung -1

Daraus resultiert die Geradengleichung:

$$g(x) = ax + b \quad \text{mit } a = -1 \wedge P\left(2; -\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = -2 + b \Rightarrow b = \frac{5}{3} \Rightarrow g(x) = -x + \frac{5}{3}$$

Extremwertprobleme:

Eine Zielfunktion ist zu optimieren (also zu minimieren oder zu maximieren). Dabei sind bestimmte Nebenbedingungen einzuhalten

Beispiel:

Eine Literdose soll Zylinderform haben und genau einen Liter aufnehmen können. Die Oberfläche soll minimal sein.

$$\text{Zielfunktion: } f(h, r) = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{beide Deckel}} + \underbrace{2\pi r}_{\text{Umfang des Deckels}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Mantel}} = \text{Min}$$

$$\text{Nebenbedingung: } 1l = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = \pi r^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$\Rightarrow f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Das muß nun zwecks Extremwertbestimmung abgeleitet werden:

$$\Rightarrow \frac{df}{dr} = f'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = 2000$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2000}{4\pi}} \approx 5,42 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1000}{5,42\pi} \approx 10,82$$

$$f''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3} \cdot 2 > 0 \quad \forall r > 0$$

Die Hühnerhof-Aufgabe:

Ein Bauer legt hinter seinem 300m langem Schweinestall einen rechteckigen Hühnerhof an. Er hat dazu einen Zaun von 100m Länge zur Verfügung. Die Fläche soll maximal sein.

Zielfunktion: $a \cdot b = f(a, b) = \max$

Nebenbed.: $2a + b = 100 \Rightarrow b = 100 - 2a$ (Die zweite b-Seite ist die Rückseite des Schweinestalles!! Das ist hier der Witz.)

$$\Rightarrow f(a) = a(100 - 2a) = 100a - 2a^2$$

$$f'(a) = 4a - 100 \Rightarrow a = 25 \vee b = 100 - 2 \cdot 25 = 50$$

$$F = 25 \cdot 50 = 1250\text{m}^2$$

Bei einem Rechteck ist das die Lösung. Ein Halbkreis wäre noch günstiger:

$$\frac{U}{2} = r\pi = 100 \Rightarrow r = \frac{100}{\pi} \approx 31,83$$

$$\frac{F}{2} = \frac{r^2}{2} \cdot \pi = \frac{\left(\frac{100}{\pi}\right)^2}{2} \cdot \pi \approx 1592\text{m}^2$$

Beispiel:

Bei einer Streichholzsachtel ist die Länge $l = 5$ cm und das Fassungsvermögen $V = 26 \text{ cm}^3$. Wie muß die Länge der anderen beiden Kanten sein, wenn der Materialverbrauch optimal sein soll?

Zielfunktion: $f(a, b) = 2ab + 2 \cdot 5 \cdot b + 2 \cdot 5 \cdot a = 2ab + 10b + 10a$

Nebenbed.: $26\text{cm}^3 = a \cdot b \cdot 5 \Rightarrow \frac{26}{5 \cdot b} = a$

$$\Rightarrow f(b) = \frac{52}{5} + \frac{260}{5b} + 10b = \frac{52}{5} + \frac{52}{b} + 10b$$

$$f'(b) = -\frac{52}{b^2} + 10 = 0 \Rightarrow b = \sqrt{5,2} = 2,28\text{cm} \Rightarrow a = \frac{26}{5 \cdot 2,28} = 2,28$$

Beispiel einer Optimierungsaufgabe ohne Nebenbedingung:

Zur Bestimmung eines Wertes x liegen n Meßwerte x_1 bis x_n vor. Für welchen Wert x wird die Summe der Quadrate der Fehler minimal?

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2 + \dots + (x - x_n)^2 = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (x - x_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x - x_i)$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x - x_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x - x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow n \cdot x - (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow nx = \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Was das harmonische Mittel darstellt.