# Wirtschaftsmathematik

## Grundlagen

### *zu 1.1.4*

Beispiel für die Rückführung der Mengenlehre auf die Aussagenlogik:

$$C(A \cup B) = CA \cap CB$$
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$
$$C(A \cup B) = \left\{x; \overline{x \in A \vee x \in B} = \overline{x \in A} \wedge \overline{x \in B} = (x \notin A) \wedge (x \notin B) = (x \in CA) \wedge (x \in CB)\right\}$$
$$= CA \cap CB$$

### *zu 1.2*

*N* ist abgeschlossen bezüglich +,• ; d.h. alle Ergebnisse der Addition und Multiplikation liegen in der Menge
*N* ist nicht abgeschlossen bezüglich -,÷ z.B. $\{7\text{-}9 \notin N\}$

$Z = \{...,-2,-1,-0,1,2,...\}$
ist abgeschlossen bezüglich +,-,•
aber nicht abgeschlossen bezüglich ÷

$$Q = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in Z\right\}$$

ist abgeschlossen bezüglich +,-,•,÷
Aber das Ziehen von Wurlzeln ist nicht immer möglich, z.B. $\sqrt{2} \notin Q$, da $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar ist.
Nichtsdestotrotz läßt sich jede Zahl beliebig genau durch Annäherung als Bruch darstellen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.4 | 1.41 | 1.414 |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{14}{10}$ | $\frac{141}{100}$ | $\frac{1414}{1000}$ |

Die Hinzunahme aller Grenzwerte von Folgen von Zahlen aus *Q* liefert die reellen Zahlen *R*

## *zu 1.2.3*

**Ungleichungen:**

z.B. $5<7$ ohne Variable

$\underbrace{2x+1}_{T_1} \geq \underbrace{8x+2}_{T_2}$ mit Variable

Verbindung zweier Terme $T_1$ und $T_2$ durch $<, \leq, \geq, >$

Die Grundmenge (oder Definitionsbereich) der die Variablen entnommen werden muß angegeben werden, um die Lösungsmenge $L$ zu bestimmen:

*Beispiel:*

$$2x > 3 \quad \text{mit} \quad x \in R$$

$$x > \frac{3}{2} \quad , L = \left\{ x \in R \; ; x > \frac{3}{2} \right\}$$

Dagegen ist die Lösung anders bei einer anderen Definitionsmenge:

$$2x > 3 \quad \text{mit} \quad x \in N$$

$$x > \frac{3}{2} \quad , L = \{ x \in N \;\; ; x \geq 2 \}$$

Zwei Ungleichungen heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.
*Beispiel 1:*

$x \geq 0$ und $a^2 \geq 0$ sind
äquivalent bezüglich $N_0$ ($L_1 = N_0$ $L_2 = N_0$), aber
nicht äquivalent bezüglich $R$ $\left( L_1 = \{ x \in R; x \geq 0 \} \;\; L_2 = \{ x \in R \} = R \right)$

Zur Bestimmung von $L$ formt man die Ungleichung so lange um, bis $L$ einfach zu bestimmen ist. ($\rightarrow$äquivalente Umformungen)

*Möglichkeiten der Umformung zur Erhaltung der Äquivalenz:*

1) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$

$4x + 1 < 18 \quad 18 < 5x + 9$

$\Rightarrow 4x + 1 < 5x + 9$

2) Aus $a < b$ und $c \in R$ folgt $a + c < b + c$

3) Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$

$3x < 24 \;\; ; c = \frac{1}{3} \Rightarrow x < 8$

3') Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$

$7 < 8 \;\; ; c = -2 \Rightarrow -14 > -16$

*Beispiel zur Anwendung:*

$$
\begin{aligned}
& 8x+2 \quad > 4x+1 \quad (x \in R) \\
\Leftrightarrow\ & 8x-4x > 1-2 \\
\Leftrightarrow\ & 4x \qquad > -1 \\
\Leftrightarrow\ & x \qquad > -\frac{1}{4} \\
\Rightarrow\ & L = \left\{x \in R; x > -\frac{1}{4}\right\} = \left]-\frac{1}{4};+\infty\right[
\end{aligned}
$$

*2. Beispiel*

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 9 > 0 \qquad (x \in R) \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)(x+3) > 0 \\
\Rightarrow\ & 2 \text{ Fälle:}
\end{aligned}
$$

1. Fall:

$$
\begin{aligned}
& x+3 > 0 \quad \text{und} \quad x-3 > 0 \\
\Rightarrow\ & x > -3 \qquad \text{und} \quad x > 3 \\
\Rightarrow\ & L_1 = \{x \in R; x > 3\} = ]3,+\infty[
\end{aligned}
$$

2. Fall:

$$
\begin{aligned}
& x+3 < 0 \quad \text{und} \quad x-3 < 0 \\
\Rightarrow\ & x < -3 \qquad \text{und} \quad x < 3 \\
\Rightarrow\ & L_2 = \{x \in R; x < -3\} = ]-\infty,-3[
\end{aligned}
$$

Zusammen erhalten wir: $L_1 \cup L_2 = \{x \in R; x < -3 \text{ oder } x > 3\}$

*Übung 1:*

Zwei Kopiergeräte:
$K_1$: pro Kopie entstehen Kosten von 0.15 DM, monatlich dagegen 50,-- DM an Wartung
$K_2$: Pro Kopie entstehen Kosten von 0.07 DM, monatlich dagegen 74,-- DM an Wartung
Bei welcher Anzahl monatlicher Kopien ist $K_1$ günstiger, als $K_2$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0.15x + 50 && < 0.07x + 74 \\
&\Leftrightarrow 0.15x - 0.07x && < 74 - 50 \\
&\Leftrightarrow 0.08x && < 24 \\
&\Leftrightarrow x && < 300
\end{aligned}$$

*Übung 2:*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\quad x^2 - 9 < 0 \qquad (x \in R) \\
&\Leftrightarrow (x-3)(x+3) < 0 \\
&\Rightarrow 2 \text{ Fälle:} \\
&1.\ \text{Fall:} \\
&\quad x + 3 < 0 \quad \text{und} \quad x - 3 > 0 \\
&\Rightarrow x < -3 \qquad \text{und} \quad x > 3 \\
&\Rightarrow L_1 = \{\ \} \\
&2.\ \text{Fall:} \\
&\quad x + 3 > 0 \quad \text{und} \quad x - 3 < 0 \\
&\Rightarrow x > -3 \qquad \text{und} \quad x < 3 \\
&\Rightarrow L_2 = \{x \in R; -3 < x < 3\} = \left]-3,3\right[ \\
&\text{Zusammen erhalten wir: } L_1 \cup L_2 = L_2 = \{x \in R; -3 < x < 3\}
\end{aligned}$$

*Übung 3:*

Gesucht ist die Lösung aller $x \in R$, die die beiden folgenden Ungleichungen gleichzeitig erfüllt:

$$\frac{1}{3}x + \frac{x}{2} \leq x - \frac{7}{6} \ \text{ und } \ \frac{5}{2}(x-3) \leq x - 3$$

Die Schnittmenge beider Lösungsmengen ist die Gesamtlösung:

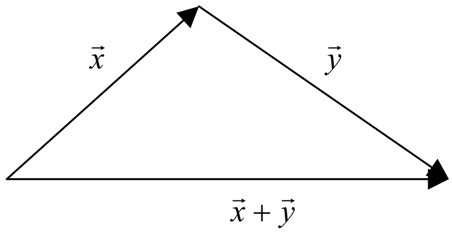
$$\frac{1}{3} + \frac{x}{2} \leq x - \frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{2+7}{6} \leq x - \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{2x - x}{2} \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$\frac{5}{2}(x-3) \leq x - 3 \Leftrightarrow \frac{5x - 15}{2} \leq x - 3 \Leftrightarrow 5x - 15 \leq 2x - 6 \Leftrightarrow 5x - 2x \leq 15 - 6 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{3} = 3$$

$$\Rightarrow L = L_1 \cap L_2 = \{3\}$$

### *1.2.3 Dreiecksungleichung*

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$




Die Summe der Länge zweier Seiten eines Dreiecks ist immer größer, als die Länge der angegebenen Seite. Länge von $\vec{x}+\vec{y} \leq$ Länge von $\vec{x}$ + Länge von $\vec{y}$

<u>*Beweis:*</u> Zwei Fälle

1. Fall: $x + y \geq 0$

$$|x+y| = x+y \leq |x| + |y| \qquad \text{(s. Satz 2 unter 1.2.3)}$$

2. Fall: $x + y < 0$

$$|x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |x| + |y| \qquad \text{(s. Satz 2 unter 1.2.3)}$$

<u>*Beispiele:*</u>

1. $7 = |x+4| \leq |3| + |4| = 7$
2. $7 = |1-8| \leq |1| + |-8| = 9$
3. Gesucht ist die Menge aller $x \in R$, für die gilt

$$|5x+3| > 28 \quad {}^{*})$$

Es ist:

$$|5x+3| = \begin{cases} 5x+3 \text{ für } 5x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{5} \\ \\ -5x-3 \text{ für } 5x+3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{5} \end{cases}$$

zu 1: hat *) die Form $5x+3 > 28 \Leftrightarrow x > 5$

$$\Rightarrow L_1 = \left\{ x \in R \;\; ; x \geq -\frac{3}{5} \text{ und } x > 5 \right\} = \{ x \in R \;\; ; x > 5 \}$$

zu 2: hat *) die Form $-(5x+3) > 28 \Leftrightarrow -5x-3 > 28 \Leftrightarrow x < -\frac{31}{5}$

$$\Rightarrow L_2 = \left\{ x \in R \;\; ; x < -\frac{3}{5} \text{ und } x < -\frac{31}{5} \right\} = \left\{ x \in R \;\; ; x < -\frac{31}{5} \right\}$$

Die gesamte Lösung ergibt sich nun aus der Vereinigung der beiden Lösungen:

$$L = L_1 \cup L_2 = \left\{ x \in R \;\; ; x > 5 \vee x < -\frac{31}{5} \right\}$$

*Übung:*

Gesucht sind alle $x \in R$, für die gilt $|x-3| < 4$

$$|x-3| < 4 \quad *)$$

Es ist:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ für } x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ \\ -x+3 \text{ für } x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

zu 1: hat *) die Form $x-3 < 4 \Leftrightarrow x < 7 \;\; ; x \geq 3$

$$\Rightarrow L_1 = \{x \in R \;\; ; 3 \leq x < 7\}$$

zu 2: hat *) die Form $-(x-3) < 4 \Leftrightarrow -x+3 < 4 \Leftrightarrow x > -1 \;\; ; x < 3$

$$\Rightarrow L_2 = \{x \in R \;\; ; -1 < x < 3\}$$

Die gesamte Lösung ergibt sich nun aus der Vereinigung der beiden Lösungen:

$$L = L_1 \cup L_2 = \{x \in R \;\; ; -1 < x < 3 \vee 3 \leq x < 7\}$$

## zu 1.3 Relationen und Funktionen

### *1.3.1 Das kartesisches Produkt (oder Kreuzprodukt) von Mengen*

*Beispiel:*

$A = \{1,2\} \qquad B = \{a,b,c\}$

a) $A \times B = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}$

***Achtung:***

Es handelt sich dabei um geordnete Paare $\Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$

$(1,a) \in A \times B \qquad (a,1) \notin A \times B$

vergleiche Mengen : $\{a,b\}=\{b,a\}$

b) $B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

$\Rightarrow A \times B \neq B \times A$

c) $N \times N = \{(m,n) \;\; ; m \in N, n \in N\}$

d) $R \times R = \{(m,n) \;\; ; m,n \in R\} = R^2$

Ist eine graphische Fläche, also alle Punkte in einem Koordinatensystem. Man nennt die Koordinaten eines Punktes auch kartesische Koordinaten.

e) $A \times B \quad A = \{x \in R \;\; ; a < x < b\} \quad B = \{y \in R \;\; ; c < y < d\}$

$A \times B = \{(x,y) \;\; ; x,y \in R \;\; ; a < x < b \quad c < y < d\}$

Dieses kartesische Produkt ergibt alle Punkte einer Fläche, die eingegrenzt wird von den Grenzen von $x$ und $y$.

f) (in diesem Skript nicht vorhanden!)

Im allgemeinen Fall für $R^n$ gibt es folgende Beispiele:

für n=2 gelten die Beispiele a)-f)

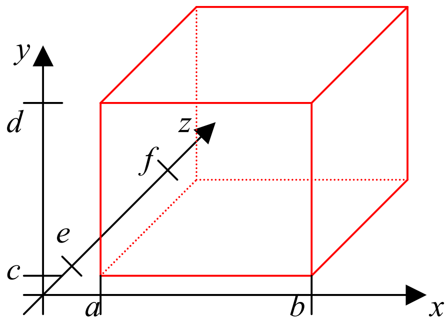
g) $A = \{1,2\}$ , $B = \{x, y\}$ , $C = \{\alpha,\beta\}$

$A \times B \times C = \{(1, x,\alpha), (1, x,\beta), (1, y,\alpha), (1, y,\beta), (2, x,\alpha), (2, x,\beta), (2, y,\alpha), (2, y,\beta)\}$

Hier heißen die 3-Tupel auch Tripel.

h) Punktmenge des 3-Dimensionalen Raumes:

$R \times R \times R = \{(x, y, z) \;\; ; x, y, z \in R\} = R^3$




ein Teilraum des $R^3$

Der Teilraum läßßt sich beschreiben als:

$\{(x, y, z) \;\; ; x, y, z \in R; a < x < b \;\; ; \;\; c < y < d \;\; ; \;\; e < z < f\}$

i) allgemein:

$R \times R \times R \times ... \times R = \{(x_1, x_2, x_3,..., x_n) \;\; ; x_i \in R; i \in N\} = R^n$

Ein einzelnes Tupel bezeichnet man als n-Tupel, man befindet sich im n-Dimensionalen Raum

### *1.3.2 Relationen*

Relationen sind Teilmengen eines kartesischen Produktes, wie man gleich sehen wird.

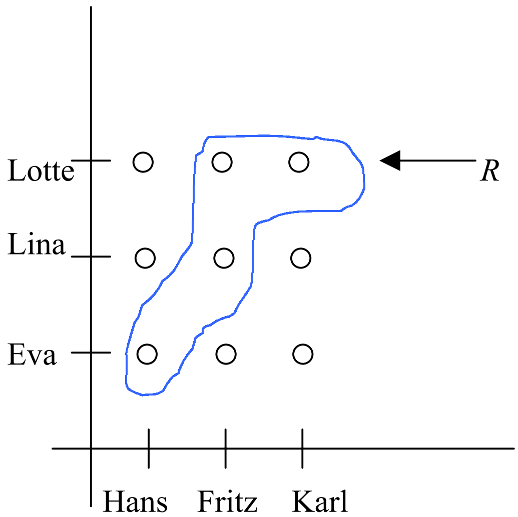
Relationen sind Beziehungen zwischen Elementen von Mengen

<u>*Beispiel:*</u>

$M$ = Menge aller Männer eines Dorfes

$F$ = Menge aller Frauen dieses Dorfes

Nun bilden wir Paarungen der Form: $(m, f) \in M \times F$ unter der Bedingung, daß zwischen den einzelnen Elementen (jeweils ein Mann und eine Frau) ein verwandschaftliches Verhältnis besteht:




Die Menge aller dieser Paare (mit Verwandschaftsverhältnis) ist eine Teilmenge $R \subset M \times F$

*Beispiel:*

a) $x = \{$Menge aller Studenten des 1. Semesters$\}$
$y = \{$Menge aller Studentinnen des 1. Semesters$\}$

„Der Student (m) $x$ ist größer als die Studentin (w) $y$" ist eine Relation zwischen $x$ und $y$.
Für jedes Paar $(x, y)$ kann man entscheiden, ob $(x, y) \in R$ oder ob $(x, y) \notin R$.

b) $x = N$ , $y = N$, $R$ sei die Gleichheitsbedingung'=', d.h.
$x = y$ oder $(x, y) \in '='$ bzw. $xRy$

c) $x \in N$ , $y \in N$ , Relation $\leq$
$x \leq y$ $((x, y) \in \leq$

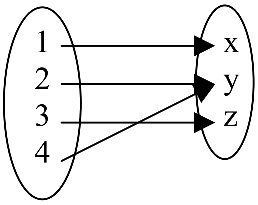
d) $x = y = R$, Relation „$y$ sei das Quadrat von $x$" oder $y = x^2$
$\Rightarrow \{(x, y) \ ; y = x^2\}$
Ergebnis ist die Normalparabel

### *1.3.3 Abbildung oder Funktion*

*Beispiel:* $x$ = Menge alle Studis
$y$ = Menge alle $N_0$

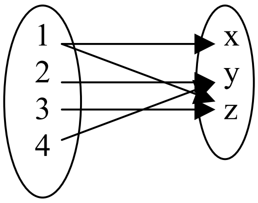
Ordne jedem Studi seine individuelle Schuhgröße zu. Dies ist eine Relation ($R \subset x \times y$). Jedem Studi kann man ***eindeutig*** seiner Schuhgröße zuordnen. (Entsprechendes könnte man für den Zigarettenkonsum eines Studis formulieren.) Umgekehrt ist das aber nicht möglich. Ich kann nicht aufgrund der Schuhgröße (Zigarettenkonsum) auf einen Studenten schließen.
=> **Funktionsbegriff**

*Beispiel:*

a) 



von $x$ nach $y$ immer **genau eine** Zuordnung!

b) 



von $x$ nach $y$ immer ungenaue Zuordnung!
Daher keine Abbildung.

c) $f: R \to R$, $x \to x^2$ oder $f(x) = x^2$ oder $y = x^2$
ergibt die allseits bestens bekannte Normalparabel.

d) $g: R \to R$, $x \to x^3$ oder $f(x) = x^3$ oder $y = x^3$
kann man mit der Hilfe einer Wertetabelle schnell zeichnen.

*Der Definitionsbereich und der Wertebereich:*

Der Definitionsbereich einer Funktion ergibt sich aus der Menge aller möglichen Werte, die in die Funktion eingesetzt werden können, da sie für die Funktion geeignet sind. In unserem Beispiel a) wäre der Definitionsbereich alle Zahlen, bei denen ein Pfeil startet, also alle Werte, denen ein Wert aus der zweiten Menge zugeordnet wird. Wenn eine Funktion nur die Werte der Menge *N* verdauen kann, man aber die Werte der Menge *R* bereitstellt, so bleiben bestimmte Werte unberücksichtigt. Daher ist der Definitionsbereich auch nur die Menge der *N*.
Als Wertebereich sind alle Werte zugelassen, die eine Pfeilspitze erhalten. Es gilt umgekehrt das gleiche, wie bei dem Definitionsbereich.

*Beispiele:*

$S$ = Menge aller Studies.
$h: S \to N_0$ , $S \to$ Zigaretten pro Tag
$D(h) = S$ $\quad W(h) = \{n \in N\ , 0 \le n \le 40\}$ „möglicherweise 40“

$i: R \to R\ , x \to \dfrac{1}{x}$
$D(i) = R/\{0]$ $\quad W(i) = R/\{0\}$

*Surjektiv, Injektiv und bijektiv:*

Surjektiv bedeutet: $f: x \to y\ , W(f) = y$

a) $x = N$ $\quad y = \{\text{gerade Zahl}\}$
$f: x \to y\ , x \to 2x$ ist surjektiv und injektiv (bijektiv), da jede gerade Zahl genau ein Urbild hat.

es soll (lt. Definition) für die Injektivität gelten:
$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

In diesem Beispiel bedeutet das:
$2n_1 = 2_{n2} \overset{\text{logisch!}}{\Rightarrow} n_1 = n_2$

b) $x = R \quad y = R$
$g : x \to y \, , \, x \to x^3$
$W(g) = R \Rightarrow$ ist surjektiv und injektiv (bijektiv)

c) $x = R \quad y = R$
$h : x \to y \, , \, x \to x^2$
$W(g) = R_0^+ \Rightarrow$ ist nicht surjektiv

d) s : Student→Schuhgröße
ist nicht injektiv, da z.B. die Schuhgröße 44 bei mehr als nur einem vorhanden ist.

***<u>Übungsaufgaben:</u>***

1)
$A = \{1,2,3\} \quad B = \{x, y, z\}$
$\Rightarrow A \times B = \{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z),(3,x),(3,y),(3,z)\}$
$\Rightarrow B \times A = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3),(z,1),(z,2),(z,3)\}$

2)
$A = \{1,2\} \quad B = \{a,b\} \quad C = \{b,c\}$
$A \times (B \cup C) = A \times \{a,b,c\} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$
$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\} \cup \{(1,b),(1,c),(2,b),(2,c)\}$
$= \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(1,c),(2,c)\}$
$A \times B \times C = \{(1,a,b),(1,a,c),(1,b,b),(1,b,c),(2,a,b),(2,a,c),(2,b,b),(2,b,c)\}$
$B \times C \times A = \{(a,b,1),(a,b,2),(a,c,1),(a,c,2),(b,b,1),(b,b,2),(b,c,1),(b,c,2)\}$

3)
$f : R \to R \;\; , x \to x \qquad D(f) = R \, ; \; W(f) = R$
$g : R \to R \;\; , x \to \frac{1}{x^2} \qquad D(g) = R / \{0\} \, ; \; W(g) = R^+ = ]0, \infty[$
$h : N \to N \;\; , x \to x \qquad D(h) = N \, ; \; W(h) = \{m \in N; m = 2^n\}$
$i : R \to R \;\; , x \to x \qquad D(i) = R \, ; \; W(i) = R^+ = ]0, \infty[$

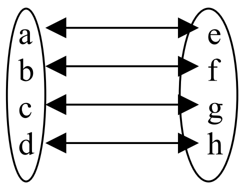
### *1.3.4 Umkehrfunktion*

<u>*Beispiel:*</u>

a) $f(n) = 2n$ ist injektiv, also

$f^{-1} : h \to \frac{n}{2}$ als „Rückgängigmachung" der Verdoppelung

Bildchen:




b) $g(x) = x^3 = y$ ist injektiv $\Rightarrow g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = x$

Man vertauscht normalerweise nun die Variablen wieder, was einer Speigelung an der Winkelhalbierenden gleichkommt. $\Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

d) Allgemein entsteht der Graph einer Umkehrfunktiongraphisch durch Spiegelgung des Graphen einer Funktion an der Winkelhalbierenden.

e) $k : R \to R$ , $x \to 3x$ $\quad (k(x) = 3x)$ ist bijektiv

1. $k$ ist injektiv => z.z: $k(x_1) = k(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

2. $k$ ist surjektiv => z.z. sei $y \in R$ (Bildmenge) gegeben.
gesucht ein $x \in R$ (Definitionsmenge), so daß $k(x) = y$

$$3x = y \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

3. $k^{-1} : R \to R : y \to \frac{y}{3}$ (Vertausche $x, y$) $\Rightarrow k^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

f) (Berechnen einer Umkehrabbildung)

$f : x \to 3x + 2 = y \qquad y = 3x + 2$

Technik: nach $x$ umformen:

$$3x = y - 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3} \Rightarrow f^{-1} : y \to \frac{y-2}{3}$$

Nach der Vertauschung also: $f^{-1} : x \to \frac{x-2}{3}$

***<u>Übung 1</u>***

1) $f(x) = \frac{2}{5}x - 3$ gesucht ist $f^{-1}$

$f(x)$ ist eine Gerade und damit bijektiv

$$y = \frac{2}{5}x - 3 \Leftrightarrow y + 3 = \frac{2}{5}x \Leftrightarrow \frac{5y+15}{2} = x$$

Nach Vertauschung: $\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{5(y+3)}{2}$

2) Nachfragefunktion:
Nachgefragte Menge eines Produktes sei $x$
$p$ sei der Preis
Die Abhängigkeit der nachgefragten Menge vom Preis damit

$$x = f(p) = -3p + 7$$

Umformung nach $p$:

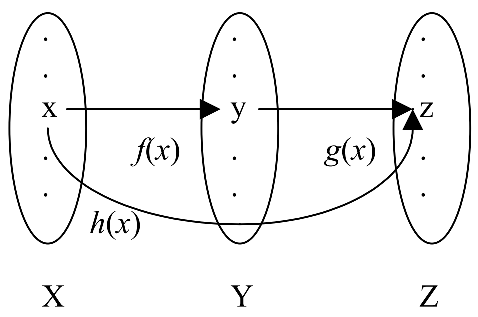
$$x = -3p + 7 \Leftrightarrow \frac{-x+7}{3} = p$$

und nach Vertauschung:

$$\Rightarrow f^{-1}(p) = \frac{7-p}{3} = x$$

### *1.3.5 Komposition (Hintereinanderausführung)*

*Graphische Veranschaulichung:*




$$h(x) = g(f(x))$$

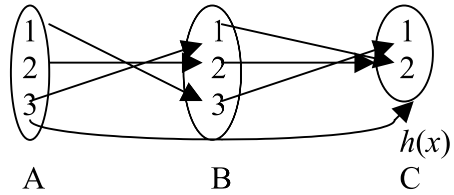
Die Graphik zeigt, daß $W(f) = D(g)$ sein müssen, damit es funktioniert.

*Beispiele:*

a) $A = B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2\}$

| x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | 3 | 2 | 1 |

| y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $z = g(y)$ | 2 | 2 | 1 |



$g(f(1)) = 1$; $g(f(2)) = 2$; $g(f(3)) = 2$

$\Rightarrow h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$

| y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $z = g(f(x))$ | 1 | 2 | 2 |

b)

$g: R \to R$, $y \to y^2 + 4y - 12$

$f: R \to R$, $x \to x + 2\ (= y)$

$W(f) = R = D(g)$

$$g \circ f(x) = g\left(\underbrace{f(x)}_{y}\right) = g(\underbrace{x+2}_{y}) = (x+2)^2 + 4(x+2) - 12$$

$$= x^2 + 4x + 4 + 4x + 8 - 12$$

$$= x^2 + 8x = x(x+8) = z$$

$D(h) = R$

$W(h) = \{z \in R;\ z \geq -16\} = [-16, \infty[$

c) $z = \sqrt{x^2 + x}$ ist zusammengesetzt aus:

$f(x) = x^2 + x = y$

$g(y) = \sqrt{y} = z$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + x}$

d) $z = (x - 3x^3)^5$ ist zusammengesetzt aus:

$f(x) = x - 3x^3 = y$

$g(y) = y^5 = z$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = (x - 3x^3)^5$

e) $f(y) = y^2 - y$ , $g(x) = \dfrac{x}{2}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$$

f) $f(p) = p^3 - 1$ , $g(q) = \dfrac{3}{2}q$

$$f \circ g(q) = f(g(q)) = f\left(\frac{3}{2}q\right) = \left(\frac{3}{2}q\right)^3 - 1 = \frac{27}{8}q^3 - 1$$

g) $z = 2^{t^2+27} - 1$

$f(z) = 2^z - 1$ , $g(t) = t^2 + 27$

$f \circ g(t) = f(g(t)) = f(t^2 + 27) = 2^{t^2+27} - 1$

# 2. Vektoren und Matrizen

## 2.1. Der $R^n$ als Vektorraum

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in R\}$$ als $n$-Dimensionaler Raum

z.B.

$R^1 = \{(x_1);\ x \in R\}$ ist eine Gerade

$R^2 = \{(x_1, x_2);\ x_i \in R\}$ beschreibt eine Fläche

$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_i \in R\}$ beschreibt einen 3-Dimensionalen Raum.

*Beispiel für einen $R^7$:*

Die Koordinaten korrespondieren zu den folgenden Wirtschaftszweigen :
1: Stahl 2: Auto 3: Landwirtschaft 4: Fischfang
5: Chemie 6: Bekleidung 7: Transport

Das folgende 7-Tupel beschreibt den Jahresumsatz in Mio. DM
(1.000, 800, 550, 300, 700, 2.000, 900)

Dieses Tupel kann man als einen Vektor bezeichnen.

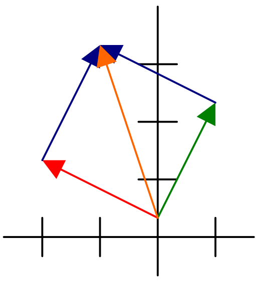
***Die Vektoraddition:***

*Beispiel:*

*a)* $\vec{x} = (1{,}2)$, $\vec{y} = (-2{,}1)$

$\vec{x} + \vec{y} = (1-2, 2+1) = (-1{,}3)$

*Graphisch:*



Parallelogramm

*b)* $\vec{a} = (-1; \pi; 3)$, $\vec{b} = (\sqrt{2}; 7; -2) \in R^3$

$\vec{a} + \vec{b} = (\sqrt{2} - 1; \pi + 7; 1)$

***Die Skalare Multiplikation:***

*Beispiel:*

*a)* $\vec{x} = (2; -1; 5) \in R^3$, $c = 7$

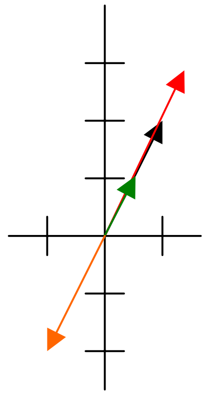
$\Rightarrow c\vec{x} = 7 \cdot \vec{x} = (7 \cdot 2; 7 \cdot (-1); 7 \cdot 5) = (14; -7; 35)$

Der Vektor $\vec{x}$ wird um den Faktor $c$ verlängert/verkürzt bzw. in der Richtung umgedreht.

*b)* $\vec{x} = (1;\,2)$ , $c = \frac{3}{2}$ , $c\vec{x} = \left(\frac{3}{2};\,3\right)$

$c = \frac{1}{2}$ , $c\vec{x} = \left(\frac{1}{2};\,1\right)$

$c = -1$ , $c\vec{x} = (-1;\,-2)$



*c)* (Beispiel von vorhin: wir rechnen den Umsatz in Dollar um!)
$c = 0{,}60$ als Umrechnungsfaktor DM $\rightarrow$ \$
$\vec{x} = (1.000,\,800,\,550,\,300,\,700,\,2.000,\,900)$
$c\vec{x} = (600,\,480,\,330,\,180,\,420,\,1.200,\,540)$

***Bemerkung:***

Der Zeilenvektor $(a_1, a_2, ..., a_n)$

und der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ : \\ a_n \end{pmatrix}$ sind unterschiedliche Objekte!

Je nach bedarf nutz man den einen oder anderen, jedoch bei der Addition und der skalaren Multiplikation ist es egal, welchen von beiden man verwendet.

## 2.2 Matrizen

Beispiele:

*a)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ als 2x3 Matrix

*b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ als 2x3 Matrix (quadratische Matrix)

*c)* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ als 2x1 Matrix (Sonderfall, auch Vektor!)

*zu a)* 3 Spaltenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

2 Zeilenvektoren: $(1;\,1;\,-2)$ ; $(-1;\,4;\,-5)$

*Anwendungen:*

*a)* Entfernung zwischen den Orten A, B, C, D

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 10 | 20 | 15 |
| B | 10 | 0 | 17 | 18 |
| C | 20 | 17 | 0 | 19 |
| D | 15 | 18 | 19 | 0 |

Symetrische, quadratische Matrix (Spiegelachse)

*b)* Außenbeziehung von drei Ländern L1, L2, L3

| | L1 | L2 | L3 |
|---|---|---|---|
| L1 | 0 | 17 | 20 |
| L2 | 14 | 0 | 30 |
| L3 | 15 | 35 | 0 |

Quadratische, nicht symetrische Matrix

*c)* Innerbetriebliche Leistungsbeziehung zwischen den Abteilungen A, B, C

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 30 | 20 |
| B | 40 | 0 | 20 |
| C | 10 | 15 | 0 |

- Zeilenvektor: Leistungsabgabe von A an die anderen Abteilungen. Bei 2. und 3. Zeilenvektor gilt das analog.
- Spaltenvektor: Leistungsempfang von B von den anderen Abteilungen. Bei 1. und 3. Spaltenvektor gilt dies analog.

*d)* Herstellung zweier Produkte P1 und P2.
Benötigt werden 4 Rohstoffe R1, R2, R3, R4.
Die Rohstoffverwendung für die Herstellung einer Einheit von P1 bzw. für P2 ist gegeben durch:

| | P1 | P2 |
|---|---|---|
| R1 | 2 | 4 |
| R2 | 3 | 0 |
| R3 | 1 | 3 |
| R4 | 6 | 5 |

gleich der Matrix: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

***<u>Quadratische Matrizen:</u>***

*<u>Z.B.:</u>*

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ist eine 2x2 Matrix, 1 und 4 bilden die **Hauptdiagonale**.

3 und 2 bilden die **Nebendiagonale**

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine 3x3 Matrix und zudem Diagonalmatrix

schreibt man auch kurz: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ und läßt die Nullen weg.

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ = Einheitsmatrix 3. Ordnung $(E, E_3)$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 2 & 6 \\ & & 3 \end{pmatrix}$ = obere Dreiecksmatrix

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 6 & 2 & \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ = untere Dreiecksmatrix

Wie einem auffallen dürfte, sind diese Matritzen alle quadratisch. Bei nicht-quadratischen Matrizen gelten diese Begriffe nicht, da es dort bereits an der Definition zur Hauptdiagonalen scheitert.

## *2.3 Operationen mit Matrizen*

### ***<u>2.3.1 Addition von Matrizen:</u>***

Funktioniert analog zu den Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 \\ 2-1 & 3+2 \\ -1+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

*Beispiel:*

Drei Betriebe beliefern vier Abnehmer

| | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|
| L1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ |
| L2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{34}$ |
| L3 | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ |

mit $a_{ij}$ = Liefermenge des Lieferanten i an Abnehmer j.

Sei $A = (a_{ij})$ die Liefermenge des 1. Halbjahres und $B = (b_{ij})$ die Liefermenge des 2. Halbjahres, so ergibt die Gesamtlieferung des Lieferanten $i$ an den Abnehmer $j$ die Matrix :

$$C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = A + B$$

## *2.3.2 Skalare Multiplikation:*

Auch die Skalare Multiplikation erinnert an das Pendant zu Verktoren:

*Beispiel:*

$$r = 3 \;\; ; \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow rA = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$$

Eine Km-Matrix als Entfernungsmatrix zu Städten umgerechnet in Meilen:

$$r = 0{,}6 \;\; ; \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 25 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6\cdot 0 & 0{,}6\cdot 15 \\ 0{,}6\cdot 25 & 0{,}6\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix kann man sich sehr gut als eine Sammlung von Spalten- oder Zeilenvektoren vorstellen.

*Beiseis von Satz 4 auf Script-Seite 4:*

$$A = (a_{ij})$$
$$\Rightarrow (r+s)A = ((r+s)a_{ij}) = (ra_{ij} + sa_{ij}) = (ra_{ij}) + (sa_{ij}) = r(a_{ij}) + s(a_{ij}) = rA + sA$$

[alles klar?!]

## *2.3.3 Multiplikation zweier Matrizen:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{3x2}$$

Es handelt sich hierbei um die Multiplikation einer $m$ x $n$ –Matrix mit einer $n$ x $k$ – Matrix. -> Resultat ist eine $m$ x $k$ – Matrix.

Das Ganze funktioniert dann so:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) & 2\cdot 4 + 1\cdot 3 + 3\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot(-1) & (-1)\cdot 4 + 0\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Also in *n*- Richtung multiplizieren und addieren. Dabei gibt die Zeilen- und Spaltennummer die Position des Ergebnisses an.

allgemein:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{n1} \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} c_{ik} \end{pmatrix}} \quad \begin{matrix} i \\ k \end{matrix}$$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

*Voraussetzung:*

Die Produktbildung zweier Matrizen ist nur erklärt, falls Spaltenzahl von $A$ = Zeilenzahl von $B$ ist. Das Produkt ist dann eine Matrix mit

der Zeilenzahl = Zeilenzahl von $A$

und der Spaltenzahl = Spaltenzahl von $B$

Wenn $A \cdot B$ definiert ist, ist dann auch $B \cdot A$ definiert?
Zufälligerweise in unserem Beispiel ja, ansonsten immer zu prüfen!

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 12 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{3x3}$$

Wenn beide Produkte definiert sind, so ist trotzdem grundsätzlich immer $A \cdot B \neq B \cdot A$, obwohl es natürlich auch hierbei immer Ausnahmen gibt.

*Beispiele:*

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b)

$$(A \cdot B) \cdot C \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -80 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C)$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 5 & -5 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 5 & -5 \\ 8 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -80 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$$

Und es ist kein Zufall, das die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

*Anwendungsbeispiel der Matrizenmultiplikation:*

Zeitliche Marktentwicklung.
Drei Kaffeeimpoteure $K_1$, $K_2$, $K_3$ teilen sich den Kaffeemarkt.
Marktanteile im 1. Monat:

$K_1$: 20%, $K_2$: 35% $K_3$: 45%

Daraus machen wir einen Spaltenvektor: $\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}35 \\ 0{,}45 \end{pmatrix} = \vec{m}_1$

Im 2. Monat werden folgende Abwanderungen beobachtet:

80% der Kunden von $K_1$ bleiben diesem treu.
10% wandern zu $K_2$
5% wandern zu $K_3$

75% der Kunden von $K_2$ bleiben diesem treu.
10% wandern zu $K_1$
15% wandern zu $K_3$

80% der Kunden von $K_3$ bleiben diesem treu.
5% wandern zu $K_1$
15% wandern zu $K_2$

Daraus machen wir eine sogn. Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}80 \end{pmatrix} = W$$

Die Marktanteile berechnen sich nun wie folgt:

$$W \cdot \vec{m}_1 = \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2275 \\ 0{,}35 \\ 0{,}4225 \end{pmatrix}$$

Sollte die Übergangsmatrix $W$ konstant bleiben, so würden sich die Folgemonate folgendermaßen berechnen:

$$m_3 = W \cdot \vec{m}_2 = \underbrace{W \cdot W}_{W^2} \cdot \vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2495 \\ 0{,}348625 \\ 0{,}401875 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich allgemein die Marktanteile im Monat $n$:

$$\vec{m}_n = \vec{m}_{n-1} \cdot W = \underbrace{W \cdot W \cdot \ldots \cdot W}_{n-1} \cdot \vec{m}_1 = W^{n-1} \cdot \vec{m}_1$$

### *2.3.4 Transposition von Matrizen:*

*Beispiel:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(A^T\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

### *2.4 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren*

Beispiel einer Linearkombination:

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -2 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_1 \,;\; \vec{x}_2 \in R^3$
$r_1 = 3 \,;\; r_2 = -2$
$\Rightarrow \vec{x} = 3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 = 3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -17 & 10 \end{pmatrix}$
$\vec{x}$ ist Linearkombination aus $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ darstellbar, man sagt $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ „spannen eine Ebene durch den Ursprung im $R^3$ auf"; $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind **linear unabhängig**.
D.h., die Menge aller Linearkombinationen von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ bilden eine Ebene des $R^3$.

*Frage:*

Wie läßt sich überprüfen, ob ein weiterer Vektor in dieser Ebene liegt oder außerhalb. Falls der Vektor in der Ebene liegt, dann muß er als Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ darstellbar sein, d.h. es muß ein $r_1, r_2 \in R$ geben, so daß $r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2 = \vec{x}$ ist.

*Linearkombinationen:*

Wir befinden uns im $R^n$:

a)

gegeben: $\vec{x}_1$, wie sehen alle Linearkombinationen von $\vec{x}_1$ aus?

($m = 1$) alle Linearkombinationen sind von der Form: $\vec{x} = r_1\vec{x}_1$

b)

($m = 1$) gegeben: $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \Rightarrow$ alle Linearkombinationen von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ haben die Form: $\vec{x} = r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2$

c)

($m = 1$) gegeben: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \Rightarrow$ alle Linearkombinationen von $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ haben die Form: $\vec{x} = r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2 + r_3\vec{x}_3$

Sollte $\vec{x}_3$ als Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ darstellbar sein, so ist $\vec{x}_3$ in der Ebene, die $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aufspannen.

## ***Überprüfen von linearer Abhängigkeit von Vektoren.***

Begriffsklärung der linearen Unabhängigkeit s. Script

*Beispiele:*

1) $\vec{x}_1 = (1 \quad 3 \quad 1), \vec{x}_2 = (-1 \quad 1 \quad 3), \vec{x}_3 = (-5 \quad -7 \quad 3);\ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \in R^3$

sind alle linear abhängig (wird behauptet). Das bedeutet, daß es möglich ist, den Null-Vektor aus diesen dreien zu erzeugen, mit mindestens einem $r_n \neq 0 \ (n \in \{1,2,3\})$.

$r_1 = 3, r_2 = -2, r_3 = 1$

$\Rightarrow 3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 3(1 \quad 3 \quad 1) - 2(-1 \quad 1 \quad 3) + (-5 \quad -7 \quad 3) = (0 \quad 0 \quad 0) = \vec{0}$

oder $\vec{x}_3 = -3\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2$ d.h. $\vec{x}_3$ ist eine *Linearkombination* von $\vec{x}_1, \vec{x}_2$

oder $\vec{x}_2 = \frac{3}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_3$

oder $\vec{x}_1 = \frac{2}{3}\vec{x}_2 - \frac{1}{3}\vec{x}_3$

Drei Vektoren sind lin.Ab., wenn die Ebene, die durch zwei dieser Vektoren aufgespannt wird, den dritten enthällt. Dieses Beispiel funktioniert aber nur, da (in diesem Beispiel) jeweils zwei Vektoren immer lin.unab. sind und der dritte dann von diesen wiederum lin.ab. ist.

2) Sind $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 3\end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ lin.abhängig?

Ansatz:

$$r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2 + r_3\vec{x}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow r_1\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + r_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Daraus bauen wir ein Gleichungssystem (GLS)

$$0 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 + 0 \cdot r_3 = 0 \quad \text{(I)}$$
$$2 \cdot r_1 - 2 \cdot r_2 + 1 \cdot r_3 = 0 \quad \text{(II)}$$
$$3 \cdot r_1 + 0 \cdot r_2 + 1 \cdot r_3 = 0 \quad \text{(III)}$$
$$\text{(I)}: \ r_2 = 0$$
$$\text{(I in II)}: 2 \cdot r_1 + 1 \cdot r_3 = 0 \Leftrightarrow r_3 = -2r_1$$
$$\text{(I + II in III)}: 3 \cdot r_1 - 2r_1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0$$
$$\Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0$$

Da alle Faktoren null sind, ist damit gezeigt worden, daß alle drei Vektoren lin.unab. sind!

3) *Die Einheitsvektoren:*

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \in R^n$$
$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \in R^n$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$\vec{e}_n = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} \in R^n$$

Im dreidimensionalen Raum sind die drei entsprechenden Einheitsvektoren jeweils einVektor auf einer der Koordinatenachsen mit der Länge 1. Also drei orthogonale Vektoren, die damit auch den Raum aufpannen. Somit *müssen* sie einfach auch lin.unabh. sein.

Allgemeiner Ansatz:

$$r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 + \dots + r_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow r_1\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 0\end{pmatrix} + \dots + r_n\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1r_1 + 0r_2 + \dots + 0r_n = 0\\ 0r_1 + 1r_2 + \dots + 0r_n = 0\\ : \qquad : \qquad :\\ 0r_1 + 0r_2 + \dots + 1r_n = 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}r_1 & & \dots & & 0\\ & r_2 & \dots & & 0\\ : & : & : & : & 0\\ & & \dots & r_n & 0\end{pmatrix} \Rightarrow r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$$

=> also alle Einheitsvektoren des $R^n$ sind lin.unab.

4) Jeder Vektor des $R^n$ läßt sich aus der Linearkombination aller Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ darstellen:

$\vec{x} = (x_1 \quad \ldots \quad x_n) \in R^n$, dann gilt

$$\vec{x} = (x_1 \quad \ldots \quad x_n) = x_1(1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0) + \ldots + x_n(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1) = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

Diese heißen auch „Basis des $R^n$"

## 2.5 Der Rang einer Matrix

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Diese Matrix kann man sich als Zeilen- oder Spaltenvektor-Konstruktion vorstellen. Der Rang einer Matrix gibt die Anzahl unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren in der Matrix wieder.

Klar: Bei einer *m* x *n* – Matrix haben wir maximal *m* Zeilenvektoren und *n* Spaltenvektoren, daher kann der Spaltenrang nur $\leq n$ und der Zeilenrang $\leq m$ sein. Da der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist, gilt $\text{rang}(A) = 2 = m$.

*Beispiele:*

1) 3x4 – Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ Nach dem Satz muß der Rang($A$) $\leq 3$ sein.

*Untersuchung der Zeilenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ auf lineare Unabhängigkeit:*

$$\text{Es ist}: r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2 + r_3\vec{x}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow r_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

genau dann, wenn:

$2r_1 + 1r_2 + 0r_3 = 0 \qquad \text{(I)}$

$3r_1 + 2r_2 + 1r_3 = 0 \qquad \text{(II)}$

$0r_1 + 1r_2 + 4r_3 = 0 \qquad \text{(III)}$

$1r_1 - 1r_2 + 2r_3 = 0 \qquad \text{(IV)}$

$\text{(I)}: r_1 = -\frac{1}{2}r_2$

$\text{(III)}: r_2 = -4r_3 \Rightarrow r_1 = 2r_3$

$\text{(I + III) in (IV)} \Rightarrow 2r_3 + 4_{r3} + 2r_3 = 0 \Leftrightarrow 8r_3 = 0 \Rightarrow r_3 = 0$

$\Rightarrow r_3 = \text{(III)}: r_2 = \text{(I)}: r_1 = 0$

Also lin.Unab. gezeigt. Damit ist der rang($A$) = 3.

2) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ Einheitsmatrix $n$-ter Ordnung (naja, $n = 2$)

Sowohl die Spalten- als auch die Zeilenvektoren sind Einheitsvektoren, die bekanntlich lin.unabh. sind. Der Rang der Einheitsmatrix ist also immer $n$.

## ***2.6 Die Inverse einer Matrix***

*Vorbemerkung:* $a \in R$ (z.B. $a = 5$)

gesucht ist ein $x \in R$, so daß $a \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$ oder $5^{-1}$

also $x = \frac{1}{a} = a^{-1} \Rightarrow a \cdot a^{-1} = 1$

*Nun das gleiche für Matrizen:*

1.) Die Nullmatrix:

$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $A$ hat keine Inverse, da es kein $X\left(= A^{-1}\right)$ geben kann, für das gilt

$A \cdot X = E$, da immer $A \cdot X = 0$

2.)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, wie behaupten: $A$ ist invertierbar und $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

*Beweis:*

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$

Ischadoll! Das ganze funktioniert auch andersherum, also $A^{-1}A = E$, was allgemein ja nicht unbedingt für Matrizen definiert war. Wohl aber für die Inverse, welche hier eine Ausnahme einnimmt.

3.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, fragen wir uns nun, ob $A$ auch invertierbar ist.

*Ansatz:*

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ mit $x_{ij} \in R$

Da $A \cdot A^{-1} = E$ gelten muß, gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

daraus folgen die Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten:

$x_{11} + 2x_{21} = 1$ (I)

$x_{12} + 2x_{22} = 0$ (II)

$4x_{11} + 8x_{21} = 0$ (III)

$4x_{12} + 8x_{22} = 1$ (IV)

III ist 4·I; jedoch soll dann einmal 1 und einmal 0 rauskommen, was einen widerspruch darstellt. Dieses GLS hat keine Lösung, => $A^{-1}$ existiert nicht.

*Invertierbarkeit:*

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, da Spaltenvektoren lin.unabh.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, da Spaltenvektoren lin. abh.

In diesem Fall gilt nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$, was auch eine Form der linearen Abhängigkeit ist

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, da Vektoren lin. unabh.

Die lineare Unabhängigkeit gilt immer sowohl für die Spaltenvektoren, als auch für die Zeilenvektoren. Sollten also die Spaltenvektoren lin.ab (lin.unab) sein, so sind auch die Zeilenvektoren lin.ab. (lin.unab.). Diese Tatsache sollte man nicht vergessen.

*Berechnung von $A^{-1}$*

Ansatz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{es gilt}: A \cdot A^{-1} = E$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 4 \cdot x_{21} = 1 & 4 \cdot x_{22} = 0 \\ -x_{11} = 0 & -x_{12} = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_{21} = \frac{1}{4} & x_{22} = 0 \\ x_{11} = 0 & x_{12} = -1 \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

# 3. Lineare Gleichungssysteme

***<u>Ein wichtiger Sachverhalt mit Matrizen und der Lösbarkeit von LGLS:</u>***

geg.: eine Matrix A

- $\det(A) = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) < n \Rightarrow$ Vektoren lin. abh. $\Rightarrow A^{-1}$ exisitiert nicht $\Rightarrow$ LGLS hat *keine* oder *unendlich viele Lösungen*.
- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = n \Rightarrow$ Vektoren lin. unabh. $\Rightarrow A^{-1}$ exisitiert $\Rightarrow$ LGLS hat *genau eine Lösung*.

Was genau dabei eine Determinante (det) einer Matrix ist, werden wir noch später lernen. Der Vollständigkeit halber ist sie hier aber mit aufgeführt. Einige der Feststellungen gelten aber nur für quadratische Matrizen!

## *3.1 Definition eines LGLS*

*<u>Beispiel:</u>*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Hans kauft | 2 Brötchen | 1l. Milch | | | zu 1,80 |
| am 2. Tag | 5 Brötchen | 2l. Milch | und | 4 Eier | zu 4,70 |
| am 3. Tag | 5 Brötchen | 2l. Milch | und | 6 Eier | zu 5,10 |

Die Preise $B$ (Brötchen), $M$ (Milch) und $E$ (Eier) für die jeweiligen Produkte sollen bestimmt werden. Also konstruieren wir aus dem Sachverhalt ein sog. <u>lineares Gleichungssystem</u> mit den jeweiligen unbekannten:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2B + 1M + \quad = 1{,}80 \\ \text{II} & 5B + 2M + 4E = 4{,}70 \\ \text{III} & 5B + 2M + 6E = 5{,}10 \end{array}$$

Dabei sind die Faktoren vor unseren Variablen (2,5,1,2,4,6) die *<u>Koeffizienten</u>*, die jeweiligen Preise bezeichnet man als die *<u>rechte Seite</u>* eines LGLS.

$\Rightarrow$ Die *<u>Koeffizientenmatrix</u>*:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B \\ M \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}80 \\ 4{,}70 \\ 5{,}10 \end{pmatrix}, \text{ bzw allgemeiner } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}80 \\ 4{,}70 \\ 5{,}10 \end{pmatrix}$$

*<u>Beispiele:</u>*

1) $$\begin{array}{lll} x_1 & -x_2 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da sich aber die erste und die zweite Gleichung widersprechen => LGLS ist nicht lösbar. (s. Def. oben)

2) $$\begin{array}{lll} x_1 & -x_2 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem bezeichnet man als homogenes GLS. Homogene GLS haben immer eine Lösung, in diesem Fall unendlich viele. $\Rightarrow L = \{x_1, x_2 \in R\ ;\ x_1 = x_2\}$

3.) $\begin{matrix} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & = & 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Dieses GLS hat eine eindeutige Lösung, da die Vektoren der Koeffizientenmatrix in keiner Wiese voneinander linear abhängig sind. Die Lösung ist offensichtlich und lautet: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

*Frage:* Wie erkennt man, ob ein GLS überhaupt lösbar ist? Wie bestimmt man alle(!) Lösungen?
Anmerkung: Nun gut, die Lineare Unabhängigkeit scheint hierbei eine Rolle zu spielen, wie ich bereits angedeutet habe.

*Weitere Anwendungsbeispiele:*

4.) Innerbetriebliche Leistungsverrechnung:
Betrieb mit 3 Abteilungen *A*, *B*, *C* (z.B. Heizung, Reparatur, Verwaltung), welche durch Leistungsabgaben miteinander Verflochten sind. Jede Abteilung gibt nach außen ab (Markt). In jeder Abteilung fallen Kosten an. Die Verechnungspreise (Kosten pro einheit) sollen bestimmt werden.
Dabei seinen *a* die Verrechnungspreise von *A*, *b* die von *B* und *c* die von *C*.

A gibt nun insgesammt an Mengeneinheiten aus:
50 + 5 + 30 = 85 ME, d.h. Kosten in Höhe von 85*a* werden weitergegeben.
In *A* entstehen 60 + 10*b* + 20*c* an Kosten. Da beide Bereiche sich ausgleichen sollen, gilt:

$$60 + 10b + 20c = 85a$$

Für *B*:

$$100b = 210 + 5a + 20c$$

Für *C*:

$$80c = 230 + 30a + 10b$$

$$\Rightarrow GLS \begin{cases} 85a - 10b - 20c = 60 \\ -5a + 100b - 20c = 210 \\ -30a - 10b + 80c = 230 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 85 & -10 & -20 \\ -5 & 100 & -20 \\ -30 & -10 & 80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 210 \\ 230 \end{pmatrix}$$

## *3.2 Lösung eines lin. GLS mittels Matrixinversion*

Hier gilt nun nur noch der Fall *m* = *n* => qadratische Matrizen, da für andere Matrizen die Inverse nicht definiert ist.

*Beweis des Satzes*

1.) Setze $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$

$\Rightarrow A\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow A\left(A^{-1}\vec{y}\right) = \vec{y} \Leftrightarrow \left(AA^{-1}\right)\cdot\vec{y} = \vec{y} \Leftrightarrow E\cdot\vec{y} = \vec{y} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}$

$\Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ ist eine Lösung.

2.) Sei $\vec{z}$ eine weitere Lösung, d.h. $A\vec{z} = \vec{y}$ adererseits auch $A\vec{x} = \vec{y}$

$\Rightarrow A\vec{z} = A\vec{x} \Leftrightarrow \left(AA^{-1}\right)\vec{z} = \left(AA^{-1}\right)\vec{x} \Leftrightarrow E\cdot\vec{z} = E\cdot\vec{x} \Leftrightarrow \vec{z} = \vec{x}$

*Die Matrixdivision ist **nicht** definiert, so daß man sich so helfen muß.*

*Beispiel:*

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & +x_2 & +8x_3 & = & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist invertierbar und (glaubt's ruhig) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Somit lösen wir mit $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -79 \\ -25 \\ 45 \end{pmatrix}$

Die eindeutige Lösung ist also: $x_1 = -79,\ x_2 = -25,\ x_3 = -43$

Die Methode der Matrixinversion lohnt sich nur dann, wenn man viele Gleichungssysteme mit gleicher Koeffizientenmatrix mit unterschiedlichen rechten Seiten lösen muß. $A^{-1}$ ist dann nur einmal zu berechnen.

*Die erweiterte Koeffizientenmatrix:*

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{\vec{x}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 25 \end{pmatrix}}^{\vec{y}} \Rightarrow (A, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

*Beispiele:*

1) geg. ist das folgende Gelichungssystem:

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +3x_2 & & +x_4 & = & y_1 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & y_2 \\ & x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & y_3 \end{array}$$

*Daraus folgt die Koeffizientenmatrix:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{3\times 4}$$

mit dem rang($A$) = 3, da $m$ = 3. Dies ist der maximal mögliche Rang. (s. 2.5)

*Die erweiterte Koeffizientenmatrix:*

$$(A, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & y_2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \quad \text{(keine weitere Zeile dazugekommen)}$$

=> für jede rechte Seite $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ist das GLS lösbar. Da der rang($A$, $y$) < $n$ ist eine Unbekannte frei wählbar, also gibt es unendliche viele Lösungen.

2) geg. folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & = & -1 \\ -x_1 & +3x_2 & = & -4 \\ x_1 & +x_2 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der rang($A$) = 2 (mehr ist nicht drin.)
Der rang($A$, $y$) = 2 ? Er könnte immerhin 3 werden, wenn der neue Vektor lin.unabh. wäre.

$(A, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rang}(A, y) = 2 =$ der Anzahl Variablen => eindeutige Lösung mit $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

3)

$A$ wie in 2), $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$ wie vorhin.

Nun die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$\text{rang}(A, y) = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > \text{rang}(A)$, also nicht lösbar.

### *3.4 Der Gaußalgorithmus*

*Beispiel 1:*

$$\begin{array}{lrrrcr} I & x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ II & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ III & -3x_1 & +2x_2 & +7x_3 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lrrrcr} I & x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ II & & -x_2 & -x_3 & = & 4 \\ III & & +2x_2 & +13x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lrrrcrl} I & x_1 & & +2x_3 & = & 0 \Rightarrow & x_1 = -\frac{16}{11} \\ II & & -x_2 & -x_3 & = & 4 \Rightarrow & x_2 = -\frac{52}{11} \\ III & & & 11x_3 & = & 8 \Rightarrow & x_3 = \frac{8}{11} \end{array}$$

Ziel des Gaußalgorithmus ist es, möglichst eine Stugfenform zu erzeugen, so daß mit Rückwärtseinsetzen alle Variablen ermittelt werden können.

Das Ganze funktioniert aber auch in Matrixform und erspart damit nicht nur etwas Schreibarbeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 13 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{11} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{52}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{11} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{52}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{11} \end{pmatrix}$$

Nach der 3. Matrix würde man mit dem Rückwärtseinsetzen beginnen. Setzt man allerdings den Gauß fort, so erhällt man diese Einheitsmatrix mit angehängtem Ergebnis. Ist auch nicht schlecht.

2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 01 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Nun kann man durch Rückwertseinsetzen die Werte ermitteln:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 1$$

oder aber man rechnet mal wieder weiter:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 14 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 14 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ und damit nicht lösbar.

Wie man bereits sehen kann, sind die beiden Zeilenvektoren lin. abhängig, daher ist der Rang der Matrix A $\text{rang}(A) = 1$, $\text{rang}(A, y) = 2$. Da sich die Ränge unterscheiden, ist das GLS per definition nicht lösbar.

4)

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_2 \quad\quad &= \quad 5 \\ x_1 \quad\quad\quad + 2x_3 &= \quad 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2x_2 + 2x_3 = -3$$

$$\Leftrightarrow x_3 = \frac{-3 + 2x_2}{2} = -\frac{3}{2} + x_2$$

Es gilt, daß in diesem Beispiel immer eine Variable frei wählbar ist und die anderen zwei daraus resultieren. Grund dafür ist der Umstand, daß wir weniger Gleichungen als Unbekannte haben. ($n$ = 3 Unbekannte)

Doch: $\operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(A, y) = 2$, daher lösbar.

### *3.5 Bestimmung des Ranges einer Matrix mittels elementarer Zeilen- und Spaltenoperationen*

*Beispiel 1):*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$$

Wir haben eine Einheitsmatrix mit 3 Pivot-Spalten erhalten.

2)

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 11 & 23 & 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -14 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier erhalten wir keine Einheitsmatrix und damit auch nicht den maximalen Rang von 3.

### *3.6 Berechnung der Inversen einer Matrix*

Die Inverse läßt sich nur bei quadratischen Matrizen berechnen. Benötigen kann man eine Inverse, da gilt:

$$A\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow AA^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow E\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

also sei die Inverse das Gegenstück zur Ausgangsmatrix.

Um die Inverse zu berechnen, wendet man bei einer $n \times n$ Ausgangsmatrix $A$ Zeilenumformungen [oder Spaltenumformungen, aber immer nur eines von beiden bis zum bitteren Ende!!] an, bis man die Einheitsmatrix erzeugt hat und wendet gleichzeit parallel auf einer Einheitsmatrix stur selbige Umformungen an. Dabei metamorphiert die Einheitsmatrix zur Inversen.

*Test des Unglaublichen:*

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{E}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Probe: } \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ da } A \cdot A^{-1} = E$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

*Und noch ein Beispiel:*

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{3 \quad -1 \quad 1}}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad 0}}^{E}} \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 & -3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{a quod errat desperandum!}$$

# 4. Determinanten

*Beispiel einer 2x2 Matrix:*

1)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \quad \det A = 5 \cdot 7 - (-4 \cdot 2) = 43$$

2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ aber auch } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

4)

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = -15 - (-2) = -13$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \det A^t = -13$$

Dies gilt allgemein:

$$\det A = \det A^t$$

5)

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

*Beispiele für 3x3 Matrizen:*

**Sarrussche Regel:**

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 0 + 8 - 6 - 0 - 6 = 1 - 12 = -11$$

2)

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 6 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 144 + 210 + 14 - 120 - 108 = 134$$

3)

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 1 + 0 - 0 + 10 - 9 = 50$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1$$

***Bemerkung:*** Auch für beliebige $n \times n$ Matrizen lassen sich Determinanten definieren, jedoch steigt dabei der Rechenaufwand explosionsartig.

Determinanten sind sehr nützlich, da in Äquivalenz folgendes gilt:

1. det $A = 0$
2. Spaltenvektoren sind lin. abh.
3. Zeilenvektoren sind lin. abh.
4. rang $A < n$
5. $A^{-1}$ existiert nicht
6. das GLS $A\vec{x} = \vec{y}$ ist nicht mit $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ lösbar
7. es existieren unendlich viele Lösungen, oder aber gar keine.

und in der Verneinung:

1. det $A \neq 0$
2. Spaltenvektoren sind lin. **un**abh.
3. Zeilenvektoren sind lin. **un**abh.
4. rang $A = n$
5. $A^{-1}$ existiert
6. das GLS $A\vec{x} = \vec{y}$ ist mit $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ lösbar
7. es existiert ***genau*** eine Lösung.

*Beispiel der Lin. Unabh.*

Gege.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Sind diese Vektoren lin. abh. oder nicht?!

Ergebnis mit Hilfe der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 8 + 6 - 0 - 4 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{ Vektoren sind lin.unabh.}$$

***<u>Beispiel mit einem GLS:</u>***

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x2 & +3x_3 & = & 5 \\ -3x_1 & +2x_2 & +7x_3 & = & \sqrt{8} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -11 \text{ (s.o.)} \Rightarrow \text{rang} = n$$

=> Das GLS ist eindeutig lösbar. Da die rechte Seite nicht mit eingeht und die erweiterte Koeffizientenmatrix den Rang nicht mehr erhöhen kann, ist dieses GLS für jede rechte Seite lösbar.